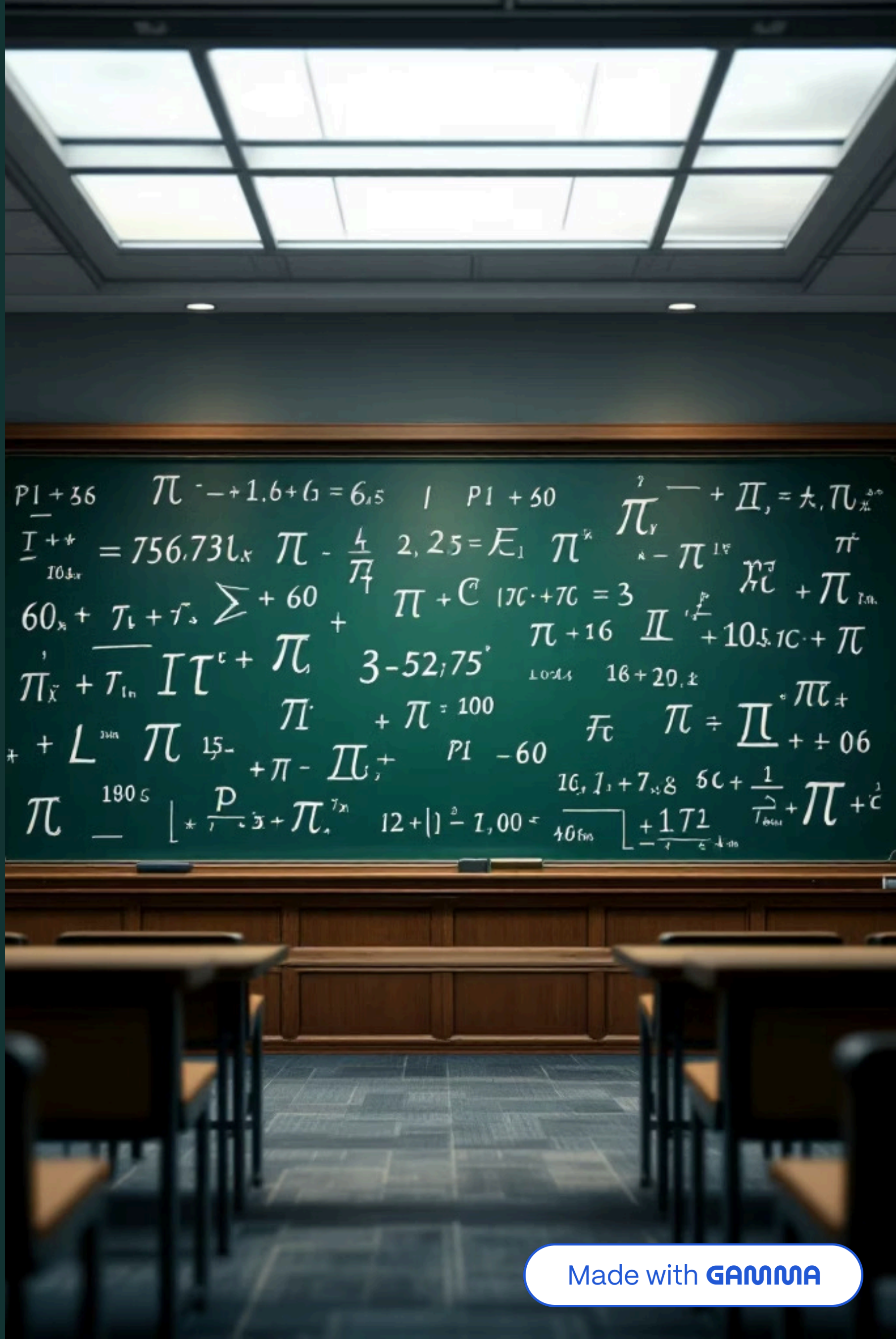
Números Racionales e Irracionales

Unidad 1: Explorando el fascinante mundo de los números reales, sus potencias y raíces



El Universo de los Números Reales

Antes de sumergirnos en las operaciones con números reales, es fundamental entender qué son y cómo se clasifican. Los números reales son el conjunto que incluye tanto a los números racionales como a los irracionales, formando una recta continua sin huecos.

Números Racionales

Son aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos enteros, donde el denominador es diferente de cero. Se denotan con el símbolo $\mathbb{Q}$.

Ejemplos:

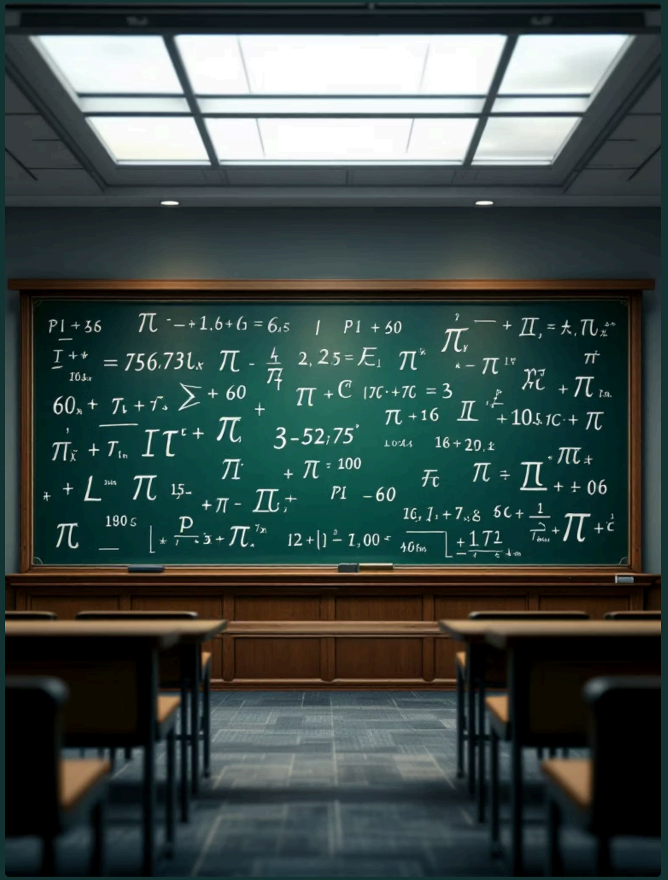
- $\frac{1}{2} = 0.5$ (decimal exacto)
- $\frac{1}{3} = 0.333...$ (decimal periódico)
- $4/2 = 2$ (número entero)
- $-5/7$ (número negativo)

Números Irracionales

No pueden expresarse como fracción de enteros. Tienen decimales infinitos no periódicos. Se denotan con el símbolo $\mathbb{Q}^c$.

Ejemplos:

- $\sqrt{2} = 1.414213...$ (raíz cuadrada)
- $\pi = 3.141592...$ (pi)
- $e = 2.718281...$ (número de Euler)
- $\phi = 1.618033...$ (número áureo)



Potenciación de Números Reales

La potenciación es una operación matemática que consiste en multiplicar un número (llamado base) por sí mismo una cantidad determinada de veces (llamada exponente). Esta operación es fundamental en álgebra y aparece constantemente en física, química, biología y economía.

Definición Básica

Para un número real **a** y un número natural **n**, la potencia se escribe como a^n y significa multiplicar **a** por sí mismo **n** veces.

$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$

(**n** veces)

Componentes

Base: El número que se multiplica (a)

Exponente: El número de veces que se repite la base (n)

Potencia: El resultado de la operación

Ejemplos Prácticos

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

La potenciación nos permite expresar números muy grandes o muy pequeños de manera compacta. Por ejemplo, 10^6 representa un millón (1,000,000), mientras que 10^{-3} representa 0.001. Esta notación es especialmente útil en ciencias donde trabajamos con cantidades extremas.

Propiedades de la Potenciación

Las propiedades de la potenciación nos permiten simplificar expresiones algebraicas complejas y realizar cálculos de manera más eficiente. Estas propiedades son esenciales para el álgebra avanzada y el cálculo.

1

Producto de Potencias con Igual Base

Cuando multiplicamos potencias con la misma base, sumamos los exponentes:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

Ejemplo: $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

2

Cociente de Potencias con Igual Base

Cuando dividimos potencias con la misma base, restamos los exponentes:

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ejemplo: $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4 = 625$

3

Potencia de una Potencia

Cuando elevamos una potencia a otra potencia, multiplicamos los exponentes:

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

Ejemplo: $(3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6 = 729$

4

Potencia de un Producto

El producto elevado a una potencia es igual al producto de cada factor elevado a esa potencia:

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Ejemplo: $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

5

Potencia de un Cociente

El cociente elevado a una potencia es igual al cociente de cada término elevado a esa potencia:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo: $\left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$

6

Exponente Cero

Cualquier número diferente de cero elevado a la potencia cero es igual a 1:

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

Ejemplo: $7^0 = 1, (-5)^0 = 1$

Notación Científica

La notación científica es una forma compacta de escribir números muy grandes o muy pequeños. Se utiliza ampliamente en ciencias, ingeniería y matemáticas para simplificar la escritura y los cálculos con cantidades extremas.

Estructura de la Notación Científica

Un número en notación científica se expresa como:

$a \times 10^n$

Donde:

- **a** es un número entre 1 y 10 (llamado mantisa o coeficiente)
- **n** es un número entero (positivo, negativo o cero)

El exponente **n** indica cuántas posiciones debemos mover el punto decimal:

- Si **n** es positivo, movemos el punto hacia la derecha
- Si **n** es negativo, movemos el punto hacia la izquierda

Ejemplos

Números Grandes:

300,000,000 = 3×10^8

150,000,000 km (distancia al sol) = 1.5×10^8 km

Números Pequeños:

0.000000005 = 5×10^{-9}

0.000000000001 m = 1×10^{-12} m (picómetro)

1

De Notación Decimal a Científica

Cuenta cuántas posiciones mueves el punto decimal para obtener un número entre 1 y 10. Ese número es el exponente.

2

De Científica a Decimal

Mueve el punto decimal hacia la derecha (si el exponente es positivo) o hacia la izquierda (si es negativo) tantas posiciones como indique el exponente.

Operaciones con Números en Notación Científica

Realizar operaciones con números en notación científica sigue reglas específicas que nos permiten mantener el resultado en la misma forma. Estas operaciones son fundamentales en laboratorios y cálculos científicos.

Adición y Sustracción

Condición: Los números deben tener el mismo exponente de 10

$(a \times 10^n) + (b \times 10^n) = (a + b) \times 10^n$

$(a \times 10^n) - (b \times 10^n) = (a - b) \times 10^n$

Ejemplo:

$(3 \times 10^5) + (2 \times 10^5) = (3 + 2) \times 10^5 = 5 \times 10^5$

Si los exponentes son diferentes, debemos ajustar uno de los números:

$4 \times 10^3 + 2 \times 10^4 = 0.4 \times 10^4 + 2 \times 10^4 = 2.4 \times 10^4$

Multiplicación

Multiplicamos las mantisas y sumamos los exponentes:

$(a \times 10^m) \times (b \times 10^n) = (a \times b) \times 10^{m+n}$

Ejemplo:

$(2 \times 10^3) \times (3 \times 10^4) = (2 \times 3) \times 10^{3+4} = 6 \times 10^7$

$(4 \times 10^{-2}) \times (5 \times 10^6) = 20 \times 10^4 = 2 \times 10^5$

División

Dividimos las mantisas y restamos los exponentes:

$\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \frac{a}{b} \times 10^{m-n}$

Ejemplo:

$\frac{8 \times 10^6}{2 \times 10^3} = \frac{8}{2} \times 10^{6-3} = 4 \times 10^3$

$\frac{6 \times 10^2}{3 \times 10^5} = 2 \times 10^{-3}$

Importante: Mantener la Forma Correcta

Después de realizar las operaciones, asegúrate de que el resultado esté en notación científica correcta (la mantisa entre 1 y 10). Si el resultado no cumple esta condición, ajusta el exponente moviendo el punto decimal.

Radicación de Números Reales

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Consiste en encontrar un número que, elevado a una potencia determinada, nos dé un valor conocido. Esta operación es fundamental para resolver ecuaciones y trabajar con funciones.

Raíz Cuadrada

La raíz cuadrada de un número **a** es el número **b** tal que $b^2 = a$

Se denota: $\sqrt{a}$ o $\sqrt[2]{a}$

Ejemplos:

$\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$

$\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$

Raíz Cúbica

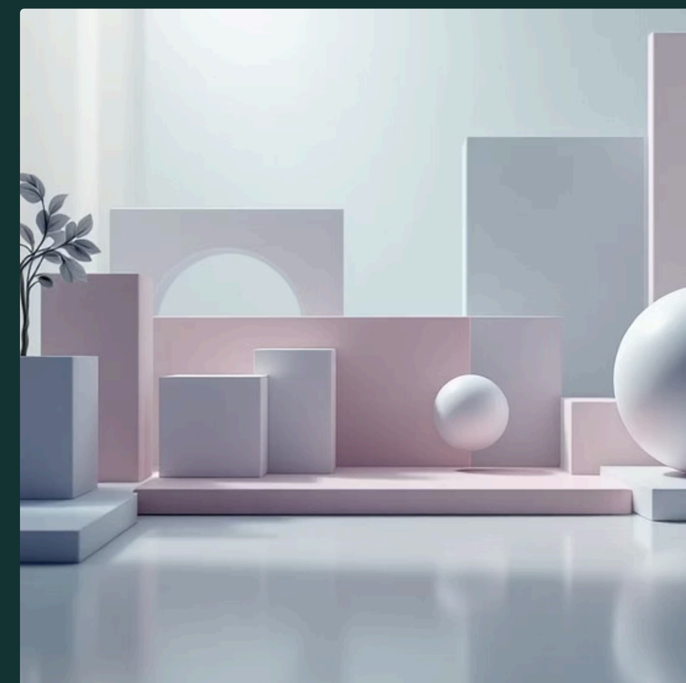
La raíz cúbica de un número **a** es el número **b** tal que $b^3 = a$

Se denota: $\sqrt[3]{a}$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3^3 = 27$



Raíz n-ésima

La raíz n-ésima de **a** es el número **b** tal que $b^n = a$

Se denota: $\sqrt[n]{a}$

Ejemplos:

$\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^4 = 16$

$\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$

Componentes de un Radical

$\sqrt[n]{a} = b$

- **n**: Índice (indica la potencia)
- **a**: Radicando (número al que se le extrae la raíz)
- **b**: Raíz (resultado)

Notas Importantes

- En la raíz cuadrada, el índice 2 se omite por convención
- Los números negativos no tienen raíces reales de índice par
- Los números negativos sí tienen raíces reales de índice impar

Propiedades de la Radicación

Las propiedades de la radicación nos permiten simplificar expresiones con raíces y relacionarlas con las operaciones de potenciación. Estas propiedades son esenciales para trabajar con expresiones algebraicas complejas.

1. Raíz de un Producto

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces:

$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

Ejemplo:

$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$

$\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$

2. Raíz de un Cociente

La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces:

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Ejemplo:

$\sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$

$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

3. Raíz de una Raíz

La raíz de una raíz se puede combinar multiplicando los índices:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$

Ejemplo:

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2 \times 2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

4. Raíz de una Potencia

La raíz de una potencia se puede expresar como una potencia fraccionaria:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo:

$\sqrt{4^3} = 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

$\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

5. Potencia de una Raíz

Una potencia de una raíz se puede expresar como una raíz de una potencia:

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo:

$(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

$(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

6. Raíz de un Número Elevado a su Índice

Cuando el exponente del radicando es igual al índice de la raíz:

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Ejemplo:

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$

$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

Nota: Para índices pares, usamos el valor absoluto porque la raíz principal es positiva.

Operaciones con Radicales

Las operaciones con radicales requieren técnicas específicas que dependen de si los radicales son semejantes (tienen el mismo índice y el mismo radicando) o no. Estas operaciones son fundamentales para simplificar expresiones algebraicas.

01

Radicación de Expresiones

Para simplificar expresiones con radicales, primero factorizamos el radicando buscando potencias perfectas que coincidan con el índice.

02

Radicandos Semejantes

Dos o más radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando. Solo los radicales semejantes pueden sumarse o restarse.

03

Operaciones Aritméticas

Aplicamos las propiedades de la radicación para realizar las operaciones, combinando los coeficientes cuando los radicales son semejantes.

Adición y Sustracción de Radicales

Condición: Los radicales deben ser semejantes (mismo índice y mismo radicando)

$a\sqrt[n]{c} \pm b\sqrt[n]{c} = (a \pm b)\sqrt[n]{c}$

Ejemplos de Suma

$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Ejemplos de Resta

$5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$4\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7} = 3\sqrt[3]{7}$

$3\sqrt{6} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

Multiplicación de Radicales

Con Igual Índice

Cuando los radicales tienen el mismo índice, multiplicamos los radicandos:

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

Ejemplos:

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$

Con Diferente Índice

Convertimos a exponentes fraccionarios, encontramos el mínimo común múltiplo de los índices, y luego multiplicamos:

$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n \times b^m}$

Ejemplo:

$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{8 \times 9} = \sqrt[6]{72}$

División de Radicales

Para dividir radicales, aplicamos la propiedad del cociente de raíces:

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Ejemplos:

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Racionalización de Fracciones

La racionalización es el proceso de eliminar los radicales del denominador de una fracción. Esta técnica es útil para simplificar expresiones y facilitar cálculos posteriores en álgebra y cálculo.

Racionalización de Monomios

Cuando el denominador es un monomio con radical, multiplicamos numerador y denominador por el mismo radical para eliminarlo del denominador.

$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b}} \times \frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$

Ejemplos:

$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{16}} = \frac{2\sqrt[3]{16}}{4} = \frac{\sqrt[3]{16}}{2}$

Racionalización de Binomios

Cuando el denominador es un binomio con radicales, usamos el conjugado del binomio para eliminar los radicales.

Conjugado: Cambiamos el signo del segundo término

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ejemplos:

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Paso 1: Identificar el Tipo

Determina si el denominador es un monomio o un binomio con radicales.

Paso 2: Elegir el Conjugado

Para monomios: usa el mismo radical. Para binomios: usa el conjugado (cambia el signo).

Paso 3: Multiplicar

Multiplica numerador y denominador por el conjugado o por el radical apropiado.

Paso 4: Simplificar

Aplica las propiedades de los radicales y simplifica la expresión resultante.

Consejo Práctico

La racionalización es especialmente útil cuando trabajamos con límites en cálculo, porque facilita el análisis del comportamiento de las funciones cuando la variable tiende a cierto valor.