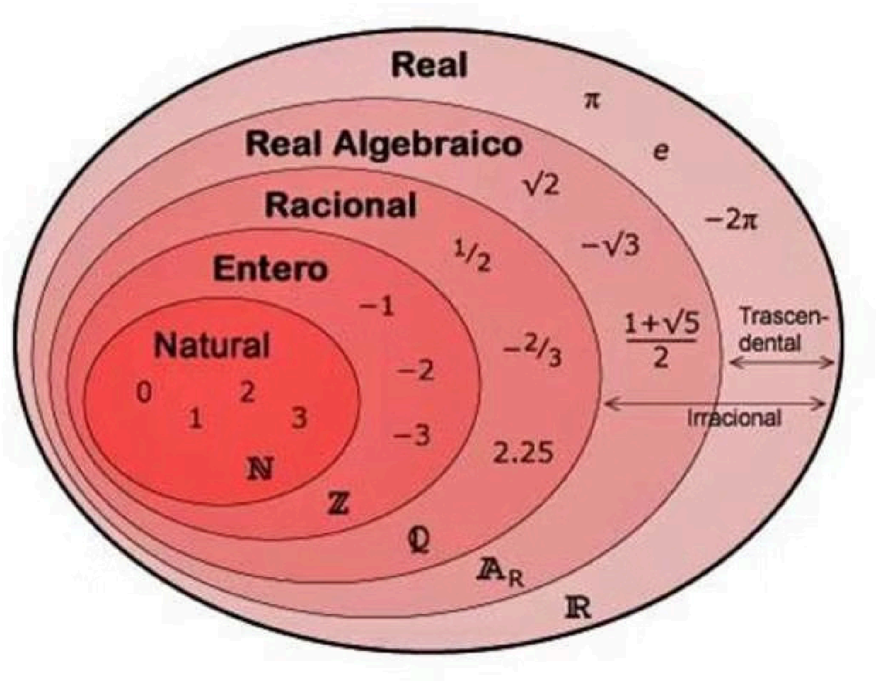
UNIDAD 1: Conjuntos Numéricos

Una exploración visual de los diferentes tipos de números que forman el universo matemático

¿Qué son los conjuntos numéricos?



Los **conjuntos numéricos** son colecciones de números que compartimos características comunes. Cada conjunto es como una familia especial de números que se comportan de manera similar y siguen ciertas reglas.

Imagina que los números están organizados en círculos dentro de círculos, como una cebolla. Cada capa representa un conjunto más amplio que incluye al anterior. Desde los más simples (los naturales) hasta los más complejos (los reales).

En esta unidad vamos a explorar cada uno de estos conjuntos, entender sus propiedades y aprender cómo se relacionan entre sí. Esta comprensión es fundamental para todo lo que vendrá después en matemáticas.

Números Naturales (ℕ)

Definición

Son los números que usamos para **contar**: 1, 2, 3, 4, 5...

Operaciones

Se pueden **sumar** y **multiplicar** libremente dentro de este conjunto

Característica

Son **infinitos** y tienen un **orden** natural: cada número tiene un sucesor

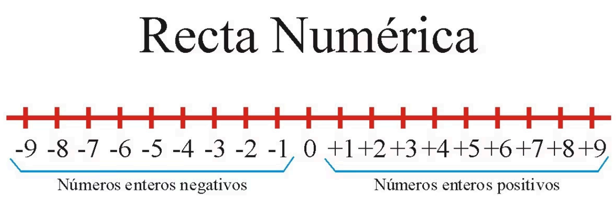
Los números naturales son el punto de partida de todas las matemáticas. Los usamos en la vida diaria para contar objetos, personas, días, etc. **Importante:** Algunos matemáticos incluyen el 0 en los naturales, otros no. En este curso, empezamos desde 1.

Ejemplos: 5 manzanas, 25 estudiantes en un salón, el número 100, el año 2024.

Números Enteros (ℤ)

Los números enteros **amplían** los naturales para incluir el **cero** y los **números negativos**. Así, el conjunto ℤ = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

¿Por qué son importantes? Porque nos permiten representar **situaciones de deuda**, **temperaturas bajo cero**, **niveles bajo el nivel del mar**, y muchas otras situaciones reales.



Valor Absoluto

El **valor absoluto** de un número entero es su **distancia desde el cero** en la recta numérica, sin importar la dirección. Se denota |n|.

- |5| = 5 (está a 5 unidades del cero)
- |-3| = 3 (está a 3 unidades del cero)
- |0| = 0 (está en el cero)

Operaciones con Números Enteros

Ahora que conocemos los enteros, aprendamos a operar con ellos. Las reglas son similares a las de los naturales, pero debemos considerar los signos.

1

Suma (+)

Mismo signo: Sumamos los valores absolutos y conservamos el signo común.

3 + 5 = 8, (-3) + (-5) = -8

Signo diferente: Restamos (mayor - menor) y usamos el signo del mayor.

5 + (-3) = 2, (-5) + 3 = -2

2

Resta (−)

La resta es equivalente a **sumar el opuesto**: a − b = a + (-b)

7 − 4 = 7 + (-4) = 3

2 − 5 = 2 + (-5) = -3

4 − (-2) = 4 + 2 = 6

3

Multiplicación (×)

Regla de los signos:

- (+) × (+) = (+)
- (+) × (−) = (−)
- (−) × (+) = (−)
- (−) × (−) = (+)

3 × 4 = 12, 3 × (-4) = -12, (-3) × (-4) = 12

4

División (÷)

Sigue la **misma regla de signos** que la multiplicación.

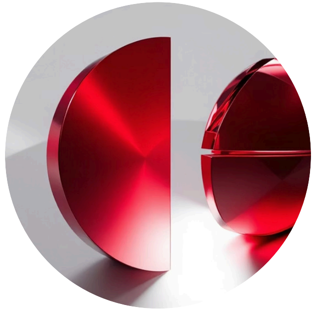
12 ÷ 3 = 4, 12 ÷ (-3) = -4, (-12) ÷ (-3) = 4

Importante: La división no siempre da un entero (ej: 5 ÷ 2 = 2.5), pero eso lo veremos con racionales.

Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

Los **números racionales** son todos aquellos que se pueden expresar como una **fracción** o **razón** de dos enteros, donde el denominador no es cero. Es decir, $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

Este conjunto incluye a los enteros (porque 5 = 5/1), las fracciones comunes (1/2, 3/4, -2/3), y también los **números decimales** que son **finitos** o **periódicos**.



Fracciones

½, ¾, -⅔, 5/7

Decimales finitos

0.5, 0.25, 1.2, -0.75

Decimales periódicos

0.333..., 0.1666..., 0.999...

Operaciones con Números Racionales

Las operaciones con fracciones requieren algunos pasos adicionales, pero siguen siendo manejables con práctica.

Suma y Resta

Paso 1: Encontrar un **denominador común** (mínimo común múltiplo).

Paso 2: Convertir ambas fracciones al denominador común.

Paso 3: Sumar o restar los numeradores.

Paso 4: Simplificar si es posible.

Ejemplo:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = (4/12) + (3/12) = 7/12$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = (3/6) - (2/6) = 1/6$

Multiplicación

Es la más fácil: **multiplicamos numeradores y denominadores** directamente.

$a/b \times c/d = (a \times c)/(b \times d)$

Ejemplo:

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = (2\times3)/(3\times4) = 6/12 = \frac{1}{2}$

División

Multiplicamos por el **recíproco** (inverso) del divisor.

$a/b \div c/d = a/b \times d/c$

Ejemplo:

$\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times 2/1 = 4/3$

Representación Decimal y Fraccionaria

$\frac{1}{2}$

Fracción a Decimal

Dividimos el numerador entre el denominador.

3/4 = 3 ÷ 4 = 0.75

1/3 = 1 ÷ 3 = 0.333...

10

Decimal finito a fracción

Escribimos el número sin decimal como numerador, y como denominador 1 seguido de tantos ceros como decimales.

0.25 = 25/100 = ¼

1.2 = 12/10 = 6/5

∞

Decimal periódico a fracción

Hay un método especial: x = 0.333... → 10x = 3.333... → 10x - x = 3 → 9x = 3 → x = ⅓

Los números racionales son **densos**: entre dos racionales siempre hay infinitos racionales más. Sin embargo, **no llenan toda la recta numérica**... ¡ahí entran los irracionales!

Números Irracionales (�)

Los **números irracionales** son aquellos que **no se pueden expresar** como una fracción de enteros. Su representación decimal es **infinita y no periódica**.

π (Pi)

≈ 3.14159265... La relación entre circunferencia y diámetro de un círculo. ¡Aparece en geometría, física, estadística...

√2 (Raíz de 2)

≈ 1.41421356... La diagonal de un cuadrado de lado 1. Descubierto por los pitagóricos, ¡causó una crisis matemática!

ϕ (Phi - Número Áureo)

≈ 1.61803398... Aparece en arte, arquitectura, naturaleza. Relación armoniosa entre partes.

Representación en la Recta Numérica

Aunque no se pueden escribir exactamente como fracción, los irracionales **corresponden a puntos específicos** en la recta numérica. Por ejemplo, √2 se puede construir con geometría usando un triángulo rectángulo de catetos 1.

Los racionales y los irracionales **juntos forman** los números reales, llenando completamente la recta numérica sin huecos.

Números Reales (ℝ)

El conjunto de los **números reales** es la **unión** de los racionales (ℚ) e irracionales (⍰). Es decir, ℝ = ℚ ∪ ⍰. Este conjunto **llena completamente** la recta numérica.

1

Orden

Para cualquier par de reales a y b, se cumple una y solo una: $a < b$, $a = b$, o $a > b$. Se pueden **comparar** en la recta numérica.

2

Aproximación

Truncamiento: Cortar cifras decimales ($\pi \approx 3.141$)

Redondeo: Aproximar según la cifra siguiente ($\pi \approx 3.142$)

3

Operaciones

Se pueden **sumar, restar, multiplicar, dividir** (excepto por cero) y el resultado sigue siendo real. Estas operaciones cumplen propiedades como **conmutativa, asociativa, distributiva**.

Resumen: Los conjuntos están **anidados**: ℕ ⊂ ℤ ⊂ ℚ ⊂ ℝ, y ℝ = ℚ ∪ ⍰. Cada conjunto amplía el anterior para resolver más problemas matemáticos y representar mejor el mundo real.