Unidad 2: Productos notables y factorización.

2.1 Productos notables.

Son aquellos productos que se resuelven con la ayuda de reglas que evitan efectuar todo el producto.

2.1.1 Binomio al cuadrado.

Al elevar un binomio al cuadrado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto.

Regla:

- Se eleva al cuadrado el primer término del binomio.
- Se suma o se resta el doble producto del primer término por el segundo.
- Se suma el cuadrado del segundo término del binomio.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Ejemplos:

1.- El desarrollo de $(m+5)^2$ es:

a) m^2+5 b) m^2+25 c) $m^2+2m+10$ d) $\underline{m^2+10m+25}$

2.- El desarrollo de $(7+x)^2$ es:

a) $49+x^2$ b) $49-x^2$ c) $\underline{x^2+14x+49}$ d) $49+14x+x^2$

** Nota: El trinomio se ordena, por lo tanto, la respuesta es el inciso c **

3.- El desarrollo de $(n^2+10)^2$ es:

a) $\underline{n^4+20n^2+100}$ b) $n^4-20n+100$ c) n^2-100 d) n^2+20

2.1.1.1 Binomios conjugados.

Son aquellos que tienen los mismos elementos, pero uno de ellos tiene el signo contrario y el resultado es una diferencia de cuadrados.

$$(x+y)\,(x-y)=x^2-y^2$$

Regla:

- Se eleva al cuadrado el término que no cambia de signo.
- Se resta el cuadrado del término que cambia de signo.

Ejemplos:

1.- El desarrollo de $(b+8)\,(b-8)$ es:

a) $b^2-16b+64$ b) $\underline{b^2-64}$ c) $b^2+8b+64$ d) b^2+64

2.- El desarrollo de $(2a-1)\,(1+2a)$ es:

a) $\underline{4a^2-1}$ b) $4a^2+2$ c) $1-4a+4a^2$ d) $1+4a^2$

** Nota: Se ordenan los términos de los binomios: $(2a-1)\,(2a+1)$, por lo tanto, la respuesta es el inciso a. **

3.- El desarrollo de $\left(2x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{2}\right)$ es:

a) $4x^2+\frac{1}{4}$ b) $\underline{4x^2-\frac{1}{4}}$ c) $4x^2+2x+\frac{1}{4}$ d) $x^2-x+\frac{1}{4}$

Solución: Al aplicar la regla de la diferencia de cuadrados: $\left(2x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{2}\right)=(2x)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=4x^2-\frac{1}{4}$, por lo tanto, la respuesta es el inciso b.

4.- El desarrollo de $(-3x-2)\,(3x-2)$ es:

a) $4-12x+19x^2$ b) $\underline{4-9x^2}$ c) $9x^2-4$ d) $4+12x+9x^2$

Solución: Se acomodan los elementos de los binomios y se le aplica la regla de la diferencia de cuadrados: $(-2-3x)\,(-2+3x)=(-2)^2-(3x)^2=4-9x^2$, por lo tanto, la respuesta es el inciso b.

2.1.1.2 Binomios con término común.

Son aquellos que se encuentran en un producto y ambos tienen un término que se repite.

Regla:

- Se eleva al cuadrado el término común.
- Se suma algebraicamente los términos no comunes y se multiplican por el término en común.
- Se suma el producto algebraico de los dos términos nos comunes.

$$(x+a)\,(x+b)=(x)^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplos:

1.- El desarrollo de $(x+8)\,(x+5)$

a) $x^2+40x+13$ b) $\underline{x^2+13x+40}$ c) x^2+40 d) x^2+13

2.- El desarrollo de $(x+9)\,(x-10)$ es:

a) x^2+x-90 b) x^2-90 c) x^2-1 d) $\underline{x^2-x-90}$

2.1.1.3 Binomio al cubo.

Este tipo de binomio es de la forma:

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Regla:

- El cubo del primer término.
- Más el triple producto del cuadrado del primero término por el segundo.
- Más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo.
- Más el cubo del segundo término.

Ejemplos:

1.- El desarrollo de $(a+2)^3$ es:

a) $\underline{a^3+6a^2+12a+8}$ b) $a^3+9a^2+12a-8$ c) $a^3+9a^2+12a+8$ d) $a^3+6a^2+12a-8$

Solución:

$$(a+2)^3 = (a)^3 + 3(a)^2(2) + 3(a)(2)^2 + (2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$$

2.- El desarrollo de $(x-3)^3$ es:

a) $x^3 + 6x^2 + 18x - 27$ b) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ c) $x^3 + 6x^2 + 18x + 27$ d) $\underline{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

Solución:

$$(x-3)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(-3) + 3(x)(-3)^2 + (-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

2.1.2 Binomio de Newton.

Dado $(a+b)^n$ su desarrollo es:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + b^n$$

Donde:

$$r! = 1*2*3*\ldots*(r-1)*r \rightarrow \text{Número factorial}$$

2.1.2.1 i-ésimo término.

El i-ésimo término se define:

$$i - \text{ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

Ejemplos:

1.- El desarrollo de $(a+1)^4$ es:

a) $\underline{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1}$ b) $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1$ c) $a^4 + 1$ d) $a^4 - 1$

Solución:

$$(a+1)^4 = (a)^4 + 4(a)^{4-1}(1) + \frac{4(4-1)}{2!}(a)^{4-2}(1)^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}a^{4-3}(1)^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}a^{4-4}(1)^4$$

$$= a^4 + 4a^3 + \frac{4(3)}{2}a^2 + \frac{4(3)(2)}{3*2*1}a + \frac{4(3)(2)(1)}{4*3*2*1}a^0 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

2.- El desarrollo de $(2x+y)^5$ es:

a) $32x^5+y^5$
b) $32x^5-80x^4y+80x^3y^2-40x^2y^3+10xy^4-y^5$
c) $\underline{32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5}$
d) $32x^5-y^5$

Solución:

$$(2x+y)^5=(2x)^5+5(2x)^{5-1}(y)+\frac{5(5-1)}{2!}(2x)^{5-2}(y)^2+\frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(2x)^{5-3}(y)^3+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}(2x)^{5-4}(y)^4+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}(2x)^{5-5}(y)^5$$

$$=(2x)^5+5(2x)^4(y)+\frac{5(4)}{2*1}(2x)^3(y)^2+\frac{5(4)(3)}{3*2*1}(2x)^2(y)^3+\frac{5(4)(3)(2)}{4*3*2*1}(2x)^1(y)^4+\frac{5(4)(3)(2)(1)}{5*4*3*2*1}(2x)^0(y)^5$$

$$=32x^5+5(16x^4)y+10(8x^3)y^2+10(4x^2)y^3+5(2x)y^4+(1)(1)y^5$$

$$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$$

3.- El 4° término de $(3x^2+y)^4$ es:

a) $-12x^3y^2$ b) $54x^4y^2$ c) y^4 d) $\underline{-12x^2y^3}$

Solución:

$$i-\text{ésimo}=\frac{4(4-1)(4-2)}{(4-1)!}(3x^2)^{4-4+1}(-y)^{4-1}=\frac{4(3)(2)}{3!}(3x^2)^1(-y)^3=\frac{4(3)(2)}{3*2*1}(3x^2)(-y^3)$$

$$=4(3x^2)(-y^3)=-12x^2y^3$$

4.- El 6° término de $(x^2+2y^3)^8$ es:

a) $1792x^4y^{18}$ b) $1120x^8y^{12}$ c) $\underline{1792x^6y^{15}}$ d) $64x^{12}y^6$

Solución:

$$\mathrm{i-ésimo} = \frac{8(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)}{(6-1)!}(x^2)^{8-6+1}(2y^3)^{6-1} = \frac{8(7)(6)(5)(4)}{5!}(x^2)^3(2y^3)^5$$

$$= \frac{8(7)(6)(5)(4)}{5*4*3*2*1}(x^6)(32y^{15}) = 56(x^6)(32y^{15}) = 1792x^6y^{15}$$

2.2 Factorización.

Es el proceso algebraico por medio del cual se transforma una suma o diferencia de términos algebraicos en un producto.

2.2.1 Factor común.

Para obtener el factor común de un polinomio, se obtiene el máximo común divisor de los coeficientes y la literal o literales con menor exponente que se repitan en cada uno de los términos algebraicos del polinomio a factorizar.

Ejemplos:

1.- Una expresión equivalente a $3x^2 + 6x$ es:

a) $3(x^2 + 6x)$ b) $\underline{3x(x+2)}$ c) $x(3x^2 + 6)$ d) $3x^2(1 + 2x)$

Solución:

- Se obtiene el máximo común divisor de los coeficientes 3 y 6, el cual es 3.
- La literal que se repite en los términos del polinomio de menor exponente es x.
- El factor común es 3x.
- Se divide cada uno de los elementos del polinomio por el factor común: $\frac{3x^2}{3x} = x; \frac{6x}{3x} = 2$
- La factorización es: $3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

2.- Una expresión equivalente a $2x + 4$ es:

a) $2(x + 4)$ b) $4(x + 1)$ c) $\underline{2(x+2)}$ d) $x(2 + 4x)$

3.- Al factorizar $24m^3 + 16m^2 - 4m$ se obtiene:

a) $4m(6m^2 + 4m)$ b) $\underline{4m(6m^2 + 4m - 1)}$ c) $4m(8m^2 + 8m - 4)$ d) $4m(6m^3 + 4m^2 - 1)$

Solución:

- Se obtiene el máximo común divisor de los coeficientes 24, 16 y 4, que es 4.
- La literal que se repite en cada uno de los términos del polinomio con menor exponente es m.
- El factor común es 4m.
- La factorización es: $24m^3 + 16m^2 - 4m = 4m(6m^2 + 4m - 1)$

2.2.1.1 Factor común por agrupación.

Los términos del polinomio a factorizar se agrupan conforme aquellos que tengan un factor en común, de modo que la nueva expresión se pueda factorizar.

Ejemplos:

1.- Una expresión equivalente a $m^2 + mp + mx + px$ es:

a) $\underline{m(m + p) + x(m + p)}$ b) $m(m + x) + x(m + x)$ c) $m(m + p) + p(m + p)$ d) $p(m + p) + x(m + x)$

Solución:

- Los términos del polinomio se agrupan:

$$m^2 + mp + mx + px = (m^2 + mp) + (mx + px)$$

- Cada una de las nuevas expresiones se factoriza por factor común:

$$m(m + p) + x(m + p)$$

2.- Una expresión equivalente a $7x - 1 - 7xy + y$ es:

a) $(7x - 1)(1 + y)$ b) $\underline{(7x - 1)(1 - y)}$ c) $(7x + 1)(1 + y)$ d) $(7x - 1)(1 - y)$

Solución:

La expresión equivalente es:

$$(7x - 7xy) + (-1 + y) = 7x(1 - y) - 1(-1 - y) = (1 - y)(7x - 1)$$

2.2.2 Diferencia de cuadrados.

Una diferencia de cuadrados tiene la forma $\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2$ y su factorización es el producto de binomios conjugados:

$$\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2=(\mathrm{x}+\mathrm{y})(\mathrm{x}-\mathrm{y})$$

Ejemplos:

1.- La factorización de $4\mathrm{x}^2-9$ es:

a) $(2\mathrm{x}+3)(2\mathrm{x}+3)$ b) $(2\mathrm{x}-3)(2\mathrm{x}-3)$ c) $\underline{(2\mathrm{x}-3)(2\mathrm{x}+3)}$ d) $(3-2\mathrm{x})(2\mathrm{x}+3)$

Solución:

- Se obtiene la raíz de cada uno de los elementos del binomio:

$$\sqrt{4\mathrm{x}^2}=2x$$
$$\sqrt{9}=3$$

- Se agrupan en forma de binomios conjugados:

$$(2\mathrm{x}-3)(2\mathrm{x}+3)$$

2.- Una expresión equivalente a $\mathrm{m}^2-\frac{\mathrm{n}^2}{4}$ es:

a) $\left(m+\frac{n}{2}\right)\left(m+\frac{n}{2}\right)$ b) $\left(m-\frac{n}{2}\right)\left(m-\frac{n}{2}\right)$ c) $\left(m+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-m\right)$ d) $\underline{\left(m+\frac{n}{2}\right)\left(m-\frac{n}{2}\right)}$

Solución:

$$\mathrm{m}^2-\frac{\mathrm{n}^2}{4}=\left(\mathrm{m}+\frac{\mathrm{n}}{2}\right)\left(\mathrm{m}-\frac{\mathrm{n}}{2}\right)$$

2.2.3 Trinomio cuadrado perfecto.

Un trinomio cuadrado perfecto es el resultado del desarrollo de un binomio al cuadrado.

$$\mathrm{x}^2\pm 2xy+\mathrm{y}^2=(\mathrm{x}\pm\mathrm{y})^2$$

Ejemplos:

1.- Al factorizar $\mathrm{m}^2+12m+36$, se obtiene:

a) $(\mathrm{m}+18)^2$ b) $(\mathrm{m}+9)^2$ c) $\underline{(\mathrm{m}+6)^2}$ d) $(\mathrm{m}+3)^2$

Solución:

- Se ordenan los términos del trinomio en forma descendente respecto a una de las literales, de manera que en los extremos se encuentren expresiones con raíz cuadrada exacta.

$$\mathrm{m}^2+12m+36$$

- Se obtiene la raíz del 1er y 3er término:

$$\sqrt{\mathrm{m}^2}=m \quad y \quad \sqrt{36}=6$$

- Se realiza el doble producto de las raíces obtenidas:

$$2(m)(6)=12m$$

- Si el resultado coincide con el término central del trinomio, entonces es un trinomio cuadrado perfecto. Por último, se agrupan las raíces en un binomio al cuadrado y se coloca el signo del término central (+):

$$(\mathrm{m}+6)^2$$

2.- El valor de n, para que la expresión $\mathrm{x}^2+\mathrm{nx}+25$ sea un trinomio cuadrado perfecto es:

a) 5 b) <u>10</u> c) 15 d) 20

Solución:

- Se obtienen las raíces de los extremos:

$$\sqrt{\mathrm{x}^2}=x \quad y \quad \sqrt{25}=5$$

- Para que sea un trinomio perfecto el término central es el doble producto de las raíces x y 5:

$$2(x)(5)=10x$$

3.- Una expresión equivalente a $\mathrm{m}^2+81\mathrm{m}^2-18mn$ es:

a) $(\mathrm{m}+9\mathrm{n})^2$ b) $\underline{(\mathrm{m}-9\mathrm{n})^2}$ c) $(\mathrm{m}-6\mathrm{n})^2$ d) $(\mathrm{m}+3\mathrm{n})^2$

Solución:

- Se ordena el trinomio:

$$\mathrm{m}^2 - 18mn + 81\mathrm{m}^2$$

- Se obtienen las raíces de los extremos y se multiplican por 2:

$$2(m)(9n) = 18mn$$

- La factorización de $\mathrm{m}^2 - 18mn + 81\mathrm{m}^2$ es:

$$(\mathrm{m} - 9\mathrm{n})^2$$

2.2.3.1 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, se obtiene al desarrollar el producto de dos binomios con término común.

Ejemplos:

1.- Una expresión equivalente a $x^2 + 7x + 12$ es:

a) $(x - 4)(x - 3)$ b) $(x + 6)(x + 2)$ c) $(x + 12)(x + 1)$ d) $\underline{(x + 4)(x + 3)}$

Solución:

- Se ordenan los términos que forman un trinomio en forma descendente respecto a los exponentes de una de las literales, de manera que el primer término tenga raíz cuadrada exacta:

$$x^2 + 7x + 12$$

- Se obtiene la raíz cuadrada del término cuadrático, la cual se coloca en dos binomios:

$$x^2 + 7x + 12 = (x\ \ )(x\ \ )$$

- El primer binomio lleva el signo del segundo término del trinomio (+) y el segundo binomio lleva el producto de los signos del segundo y el tercer término del trinomio (+)(+) = +

$$x^2 + 7x + 12 = (x+\ )(x+\ )$$

- Se buscan dos números cuyo producto sea igual al tercer término del trinomio (12) y su suma aritmética sea el coeficiente del segundo término (7): (4)(3) = 12 y 4 + 3 = 7, los números son 4 y 3:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

- Nota: de los números encontrados, el mayor se coloca en el primer binomio y el menor se coloca en el segundo binomio.

2.- Una expresión equivalente a $m^2 + 24 - 10\mathrm{m}$ es:

a) $\underline{(m-6)(m-4)}$ b) $(m+6)(m-4)$ c) $(m-6)(m+4)$ d) $(m+6)(m+4)$

Solución:

- Se ordena el trinomio a factorizar:

$$m^2 + 24 - 10m$$

- Se determinan los signos de los binomios:

$$(m-)(m-)$$

- Se obtienen los números que multiplicados den 24 y sumados den 10:

$$(m-6)(m-4)$$

3.- Al factorizar el trinomio $n^2 - n - 56$ se obtiene:

a) $(n-8)(n-7)$ b) $(n+14)(n-4)$ c) $(n+28)(n-2)$ d) $\underline{(n-8)(n+7)}$

Solución:

$$n^2 - n - 56 = (n-\ )(n+\ ) = (n-8)(n+7)$$

2.2.3.2 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Ejemplos:

1.- Una expresión equivalente a $2x^2 + 3x + 1$ es:

a) $(2x+1)(x+2)$ b) $\underline{(x+1)(2x+1)}$ c) $(2x-1)(x-1)$ d) $(2x+1)(x-1)$

Solución:

- Se multiplican y se divide la expresión por el coeficiente del término cuadrático:

$$2x^2 + 3x + 1 = \frac{2(2x^2 + 3x + 1)}{2}$$

- Se multiplican sólo el 1er y el 3er término de la expresión:

$$\frac{4x^2 + 3(2x) + 2}{2}$$

- Se realizan los pasos para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$:

$$\frac{(2x+\;)(2x+\;)}{2} = \frac{(2x+2)(2x+1)}{2} = (x+1)(2x+1)$$

2.- Una expresión equivalente a $6x^2 - 11x - 35$ es:

a) $\underline{(3x+5)(2x-7)}$ b) $(3x-5)(2x+7)$ c) $(6x+7)(x-5)$ d) $(6x+5)(x-7)$

Solución:

$$6x^2 - 11x - 35 = \frac{6(6x^2 - 11x - 35)}{6} = \frac{36x^2 - 11(6x) - 210}{6} = \frac{(6x-21)(6x+10)}{6}$$
$$= \frac{(6x-21)(6x+10)}{3*2} = (2x-7)(3x+5)$$

2.2.4 Suma y diferencia de cubos.

Son de la forma:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \quad ; \quad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ejemplos:

1.- Una expresión equivalente a $(a^3 + 8)$ es:

a) $(a+2)(a^2+2a+4)$ b) $(a-2)(a^2+2a+4)$ c) $\underline{(a+2)(a^2-2a+4)}$ d) $(a+2)^3$

Solución:

- Se obtienen las raíces cúbicas de cada uno de los términos:

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad ; \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

- Por consiguiente:

$$a^3 + 8 = (a+2)(a^2 - 2a + 2^2) = (a+2)(a^2 - 2a + 4)$$

2.3 Teorema del residuo y del factor.

Sea el polinomio $f(x) = a_n x^{\mathrm{n}} + a_{n-1} x^{\mathrm{n}-1} + \ldots + a_0$ y el binomio $bx + c$, entonces:

a) $bx + c$ es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = 0$

b) $bx + c$ no es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = k$, con $k \neq 0$, donde k es el residuo del cociente de $f(x)$ con $bx + c$, asimismo, $-\frac{c}{b}$ resulta de resolver la ecuación $bx + c = 0$

Ejemplos:

1.- ¿Cuál de los siguientes binomios es factor del polinomio $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$?

a) $x + 2$ b) $x - 1$ c) $\underline{x + 1}$ d) $x - 2$

Solución:

Se aplica el teorema del residuo:

Para $x + 2, f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1 = -8 + 12 - 6 + 1 = -1$, no es factor.

Para $x - 1,\ f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) + 1 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$, no es factor.

Para $x + 1,\ f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$, si es factor.

Para $x - 2, f(2) = (2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) + 1 = 8 + 12 + 6 + 1 = 27$, no es factor.

2.- ¿Cuál de los siguientes binomios es factor de $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$?

a) $3x + 2$ b) $\underline{2x - 1}$ c) $2x + 1$ d) $3x - 2$

Solución:

Se evalúa el polinomio para cada uno de los binomios:

Para $3x + 2, f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 2\left(-\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) - 5\left(-\frac{2}{3}\right) + 2$

$= -\frac{16}{27} + \frac{4}{9} + \frac{10}{3} + 2 = \frac{-16+12+90+54}{27} = \frac{140}{27} = 5.18$, no es factor del polinomio

Para $2x - 1,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{2+2-20+16}{8} = \frac{0}{8} = 0$, si es factor del polinomio.

Para $2x + 1,\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{2}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 2 = \frac{-2+2+20+16}{8}$

$= \frac{36}{8} = 4.5$, no es factor del polinomio.

Para $3x - 2, f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = 2\left(\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) - 5\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{16}{27} + \frac{4}{9} - \frac{10}{3} + 2$

$= \frac{16+12-90+54}{27} = \frac{-8}{27} = -0.29$, no es factor del polinomio.

2.- El residuo que se obtiene de dividir el polinomio $x^4 + 3x^2 + 5x - 2$ por $x + 1$ es:

a) 3 b) 2 c) -2 d) -3

Solución:

Se evalúa el polinomio $x^4 + 3x^2 + 5x - 2$ en $x = -1$

$$f(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 1 + 3 - 5 - 2 = -3$$

2.4 Simplificación de fracciones algebraicas.

Dada una fracción algebraica expresarla en su forma más simple.

Ejemplos:

1.- Al simplificar la expresión $\frac{3x^4y^3}{6x^2y}$ se obtiene:

a) $2x^2y^2$ b) $\frac{1}{2}x^2y^2$ c) $2x^2y^3$ d) $\frac{y^2}{2x^2}$

Solución:

- Por tratarse de monomios se simplifican los coeficientes y las bases iguales, y se aplica la ley de los exponentes para la división:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{x^4}{x^2} = x^2 \quad ; \quad \frac{y^3}{y} = y^2$$

- Los resultados parciales se multiplican:

$$\frac{1}{2}(x^2)(y^2) = \frac{1}{2}x^2y^2$$

2.- La simplificación de $\frac{12m^5n^6p}{4m^5n^8}$ es:

a) $\frac{3p}{n^2}$ b) $3n^2p$ c) $\frac{3n^2}{p}$ d) $3np^2$

Solución:

- Se realizan las divisiones entre los coeficientes y las literales iguales:

$$\frac{12}{4} = 3 \quad ; \quad \frac{m^5}{m^5} = 1 \quad ; \quad \frac{n^6}{n^8} = \frac{1}{n^2}$$

- Aquella literal que no se simplifique permanece en su lugar, por tanto:

$$3(1)\frac{1}{n^2}(p) = \frac{3p}{n^2}$$

3.- Al simplificar $\frac{x^2-9}{x^2+8x+15}$, se obtiene:

a) $\frac{x+3}{x+5}$ b) $\frac{x-3}{x-5}$ c) $\frac{x+3}{x-5}$ d) $\frac{x-3}{x+5}$

Solución:

- La fracción se conforma de dos polinomios, que se factorizan de acuerdo con sus características para realizar la simplificación:

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \quad ; \quad x^2 + 8x + 15 = (x+5)(x-3)$$

- Por consiguiente:

$$\frac{x^2-9}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+5)(x-3)} = \frac{x-3}{x+5}$$

2.5 Operaciones con fracciones algebraicas.

2.5.1 Suma y resta.

Se aplica en la siguiente propiedad:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Ejemplos:

1.- El resultado de $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ es:

a) $\frac{3}{ab}$ b) $\frac{3}{a+b}$ c) $\frac{2b+a}{ab}$ d) $\frac{2ab}{ab}$

Solución:

- Para obtener el común denominador se multiplican los denominadores y se procede a realizar la suma de fracciones:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2(b)+1(a)}{ab}=\frac{2b+a}{ab}$$

2.- El resultado de $\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{3x^3}-\frac{3}{2x^2}$ es:

a) $\frac{x}{6x^2}$ b) $\frac{1}{6x^2}$ c) $\frac{x}{6\text{x}}$ d) $6x^2$

Solución:

- Se obtiene el mínimo común múltiplo de los coeficientes de los denominadores y se toman las literales que se repiten de mayor exponente, así como las que no se repiten:

El común denominador de $x^2, 3x^3 y\ 2x^2$ es: $6x^3$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{3x^3}-\frac{3}{2x^2}=\frac{(6x)(1)+2(2x)-(3x)(3)}{6x^3}=\frac{6x+4x-9x}{6x^3}=\frac{x}{6x^3}=\frac{1}{6x^2}$$

3.- El resultado de $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+5}{x+3}$ es:

a) $\frac{x+13}{(x+2)(x+3)}$ b) $\frac{-4}{(x-2)(x+3)}$ c) $\frac{x+13}{(x-2)(x+3)}$ d) $\frac{-7}{(x-2)(x+3)}$

Solución:

- Para obtener el común denominador se multiplican los denominadores y se procede a realizar la suma de fracciones:

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+5}{x+3}=\frac{(x+3)(x+1)-(x-2)(x+5)}{(x-2)(\,x+3)}=\frac{x^2+x+3x+3-(x^2+5x-2x-10)}{(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{x^2+x+3x+3-x^2-5x+2x+10}{(x-2)(x+3)}=\frac{x+13}{(x-2)(x+3)}$$

2.5.2 Multiplicación.

Se aplica la siguiente propiedad: $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$, el resultado se simplifica si es posible.

Ejemplos:

1.- El resultado de $\left(\frac{3x^2y^3}{4x^4y^2}\right)\left(\frac{8x}{y^2}\right)$ es:

a) $6xy$ b) $\frac{6y}{x}$ c) $\frac{6x}{y}$ d) $\frac{6}{xy}$

Solución:

- Se realiza la multiplicación de numeradores y denominadores:

$$\left(\frac{3x^2y^3}{4x^4y^2}\right)\left(\frac{8x}{y^2}\right)=\frac{(3x^2y^3)(8x)}{(4x^4y^2)(y^2)}=\frac{24x^3y^3}{4x^4y^4}=\frac{6}{xy}$$

2.- El resultado de $\left(\frac{x^2-2\mathrm{x}-3}{x^2+3x+2}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}\right)$ es:

a) $\frac{x+1}{x+2}$ b) $\frac{x+2}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{x-3}$ d) $\frac{x+3}{x+3}$

Solución:

- Las fracciones se conforman de polinomios, los que se factorizan para poder simplificar la operación:

$$x^2-2\mathrm{x}-3=(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}+1) \qquad x^2-1=(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-1)$$

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1) \qquad x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$$

- Por consiguiente:

$$\left(\frac{x^2-2\mathrm{x}-3}{x^2+3x+2}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}\right)=\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}*\frac{(x+1)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{(x-3)(x+1)(x+1)(x-1)}{(x+2)(x+1)(x-3)(x-1)}=\frac{x+1}{x+2}$$

3.- El resultado de $\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\left(1-\frac{\mathrm{b}}{a+b}\right)$ es:

a) $a+b$ b) $\frac{1}{a+b}$ c) $\underline{a-b}$ d) $\frac{1}{a-b}$

Solución:

- Se resuelve cada paréntesis:

$$a - \frac{b^2}{a} = \frac{a(a) - b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} \qquad ; \qquad 1 - \frac{\mathrm{b}}{a+b} = \frac{1(a+b) - b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

- Por consiguiente:

$$\left(a - \frac{b^2}{a}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{b}}{a+b}\right) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{(a+b)(a-b)}{a} * \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{a(a+b)(a-b)}{a(a+b)} = a - b$$

2.5.3 División.

Se aplica la siguiente propiedad: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, la fracción resultante se simplifica de ser posible.

Ejemplos:

1.- El resultado de $\frac{6a^4b^3}{a^2} \div \frac{12ab^5}{b}$, es:

a) $\frac{b}{2a}$ b) $\frac{a}{2b}$ c) $\frac{2a}{b}$ d) $\frac{2b}{a}$

Solución:

$$\frac{6a^4b^3}{a^2} \div \frac{12ab^5}{b} = \frac{(6a^4b^3)(b)}{(a^2)(12ab^5)} = \frac{6a^4b^4}{12a^3b^5} = \frac{a}{2b}$$

2.- El resultado de la división $\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) \div \left(\frac{x+1}{x^2-2x-3}\right)$ es:

a) $\frac{x-3}{x+2}$ b) $\frac{x-3}{x-2}$ c) $\frac{x+2}{x+3}$ d) $\frac{x-2}{x-3}$

Solución:

- Las fracciones se componen de polinomios, los que se factorizan para simplificar la expresión:

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \qquad ; \qquad x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

- Por consiguiente:

$$\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) \div \left(\frac{x+1}{x^2-2x-3}\right) = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} \div \frac{x+1}{(x-3)(x+1)}$$

$$\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{(x-3)}{(x+2)}$$

3.- El resultado de la división $\left(x-\frac{9}{x}\right)\div\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$ es:

a) $x(x-3)$ b) $x+3$ c) $x-3$ d) $\underline{x(x+3)}$

Solución:

- Se resuelven cada uno de los paréntesis:

$$x-\frac{9}{x}=\frac{x(x)-9}{x}=\frac{x^2-9}{x} \qquad ; \qquad \frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{x-3}{x^2}$$

- Por consiguiente:

$$\left(x-\frac{9}{x}\right)\div\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=\frac{x^2-9}{x}\div\frac{x-3}{x^2}=\frac{(x+3)(x-3)}{x}\div\frac{x-3}{x^2}$$

$$=\frac{x^2(x+3)(x-3)}{x(x-3)}=x(x+3)$$