1 Composición de funciones

La composición de funciones o la función de función es una operación que aparece naturalmente en varias situaciones. En esta nota, presentaremos (sin demostración) algunos de los resultados más importantes relacionados con esta operación. Mostraremos también como se aplican estos resultados resolviendo varios ejercicios. [1]

1.1 Definición y propiedades

Consideremos la función $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ que está definida para todos lo números reales. Supongamos que queremos calcular $f(2)$, por ejemplo. Como todos sabemos, tenemos que proceder por pasos:

1) calculamos el cuadrado de dos, $2^2 = 4$,
2) al resultado le sumamos uno, $4 + 1 = 5$,
3) al resultado le tomamos la raíz cuadrada, $\sqrt{5}$.

Podemos interpretar este procedimiento de la siguiente manera: la función $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ resulta de la aplicación sucesiva de las siguientes funciones

$$x \xrightarrow{\text{elevar al cuadrado}} x^2 \xrightarrow{\text{sumar uno}} x^2+1 \xrightarrow{\text{tomar raíz cuadrada}} \sqrt{x^2+1}.$$

Si llamamos

- u a la función de elevar al cuadrado; es decir, $u(x) = x^2$,
- h a la función de sumar uno; es decir, $h(x) = x + 1$,
- g a la función de tomar raíz cuadrada; es decir, $g(x) = \sqrt{x}$,

entonces, podemos escribir

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightarrow{\text{elevar al cuadrado}} & x^2 & \xrightarrow{\text{sumar uno}} & x^2+1 & \xrightarrow{\text{tomar raíz cuadrada}} & \sqrt{x^2+1} \\ x & \xrightarrow{u} & u(x) & \xrightarrow{h} & h(u(x)) & \xrightarrow{g} & g(h(u(x))). \end{array}$$

> La operación de aplicar sucesivamente dos o más funciones en un orden determinado da origen a otra función llamada composición de las funciones intervinientes.

Del ejemplo anterior, nos damos cuenta que son necesarias algunas condiciones para poder calcular $g(h(u(x)))$:

- x debe perternecer al dominio de u,
- $u(x)$ debe pertenecer al dominio de h,
- $h(u(x))$ debe pertenecer al domino de g.

Todas estas consideraciones las formalizaremos en la siguiente definición:

> Sean dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$, tales que $\operatorname{Im} f \subset B$. Llamaremos composición de f con g a la función, denotada $(g \circ f)$, que se obtiene por la aplicación sucesiva de f y g en ese orden. Es decir,
>
> $$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

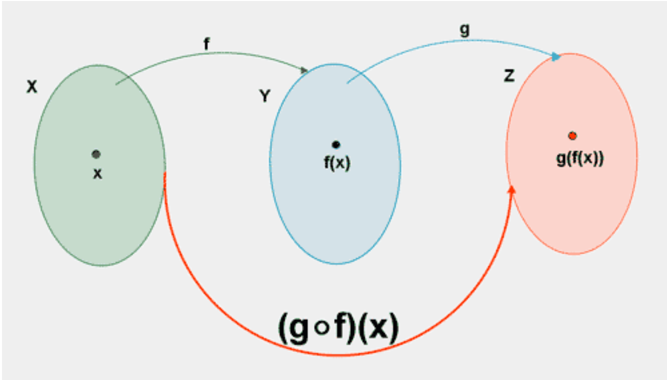

Figura 1: Esquema que representa la composición $g \circ f$.

Ejemplo 1. Consideremos las funciones $f(x) = \sqrt{2-x}$ y $g(x) = \sqrt{x^3-1}$. Sabemos que

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} = (-\infty, 2],$$

$$\operatorname{Dom} g = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, \infty).$$

Entonces, utilizando la definición anterior, tendremos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2-x}) = \sqrt{(\sqrt{2-x})^3 - 1}$$

y su dominio será

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom}(g \circ f) &= \{x \in \operatorname{Dom} f : \sqrt{2-x} \in \operatorname{Dom} g\} = \{x \in (-\infty, 2] : \sqrt{2-x} \in [1, \infty)\} \\ &= \{x \in (-\infty, 2] : 2 - x \geq 1\} = \{x \in (-\infty, 2] : x \leq 1\} = (-\infty, 1]. \end{aligned}$$

Ejercicio 1. Razonando de la misma manera, comprueben los resultados que se presentan en la siguiente tabla.

f	g	$g \circ f$	$\operatorname{Dom}(g \circ f)$	$f \circ g$	$\operatorname{Dom}(f \circ g)$
$x - 1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-1}$	$\mathbb{R} - \{1\}$	$\frac{1}{x} - 1$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$x^2 - 1$	$\sqrt[4]{x}$	$\sqrt[4]{x^2-1}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\sqrt{x} - 1$	$[0, \infty)$
$\frac{x+1}{x-2}$	$x + \frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+1}$	$\mathbb{R} - \{-1, 2\}$	$\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}$	$\mathbb{R} - \{0, 1\}$
$1 - e^x$	$\ln x$	$\ln(1 - e^x)$	$(-\infty, 0)$	$1 - x$	$(0, \infty)$
$\sqrt{x}$	e^x	$e^{\sqrt{x}}$	$[0, \infty)$	$e^{\frac{x}{2}}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\sin x$	$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\frac{1}{\sin x}$	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$

Los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, ponen en evidencia que, la composición de funciones, verifica las siguientes propiedades:

[1] Algunas ideas utilizadas en esta nota fueron tomadas del libro Cálculo diferencial de los profesores Búcari-Langoni-Vallejo (http://www.sedici.unlp.edu.ar/libros de cátedra). Si bien, en este libro, el orden de exposición de los temas es muy diferente al orden clásico, contiene ejemplos muy interesantes y una buena selección de ejercicios.

La composición de funciones es asociativa; es decir

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

La composición de funciones, en general, no es conmutativa; es decir

$$(g \circ f) \neq (f \circ g).$$

Ejemplo 2. Sean f, g y h las funciones definidas como sigue:

$$f(x) = 2x + |x| \quad \text{para todo } x, \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{para } x < 0 \\ x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}, \qquad h(x) = x + 1 \quad \text{para todo } x.$$

Queremos hallar una fórmula para evaluar $(g \circ f)$ y $(g \circ h)$. Observemos que todas las funciones están definidas para todos los reales. Tendremos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + |x|) = \begin{cases} 2x + |x| & \text{si } 2x + |x| < 0 \\ (2x + |x|)^2 & \text{si } 2x + |x| \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 9x^2 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x + 1) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x + 1 < 0 \\ (x + 1)^2 & \text{si } x + 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ (x + 1)^2 & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Ejercicio 2. Consideren nuevamente las funciones f, g y h definidas en el ejemplo anterior. Razonando como lo hicimos en el Ejemplo 2, comprueben que

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

b) $(h \circ g)(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

c) $(g \circ g)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^4 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

1.2 Límite de una composición de funciones

Hemos aprendido a construir una función a partir de la composición de dos o más funciones dadas; la idea fue simple: aplicar estas funciones en forma sucesiva siguiendo un orden determinado. Nos ocuparemos ahora de establecer una regla para el límite de la composición.

Sean dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$, tales que $\operatorname{Im} f \subset B$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ y g es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b).$$

Como consecuencia del resultado anterior, tendremos

Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $(g \circ f)$ es continua en a. En particular, si g es continua en el conjunto $\operatorname{Im} f$, entonces, $(g \circ f)$ será continua en todo punto de A en el que f sea continua. Más en particular, la composición de funciones continuas, es una función continua.

Ejemplo 3. Consideremos la función $f(x)=\sqrt{|x-1|}$. Es claro que está definida para todos los reales. Podemos pensarla como las aplicaciones sucesivas

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightarrow{\text{restar } 1} & x-1 & \xrightarrow{\text{tomar módulo}} & |x-1| & \xrightarrow{\text{tomar la raíz cuadrada}} & \sqrt{|x-1|} \\ x & \xrightarrow{u} & u(x) & \xrightarrow{h} & h(u(x)) & \xrightarrow{g} & g(h(u(x))). \end{array}$$

Queremos analizar la continuidad de f en $x_0=-3$. Entonces, tendremos

- $u(x)=x-1$ es una función continua en $x_0=-3$; es un polinomio,
- $h(u)=|u|$ es continua en $u_0=u(x_0)=u(-3)=-4$; la función módulo es continua en $\mathbb{R}$,
- $g(h)=\sqrt{h}$ es continua en $h_0=h(u_0)=h(-4)=4$; la función raíz cuadrada es continua en $(0,\infty)$.

Luego, $f(x)=(g\circ h\circ u)(x)=g(h(u(x)))=\sqrt{|x-1|}$ es continua en $x_0=-3$. Además,

$$\lim_{x\to-3}\sqrt{|x-1|}=\sqrt{\lim_{x\to-3}|x-1|}=\sqrt{|\lim_{x\to-3}x-1|}=\sqrt{|-4|}=2.$$

Ejercicio 3. Muestre que la función $f(x)=\sqrt{|x-1|}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Analizando la continuidad de las funciones intervinientes, calcular

a) $\lim\limits_{x\to0} e^{-\sqrt{3+(x-1)^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{1+\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ y g es continua en b. Entonces, también podemos escribir

$$\lim_{x\to a}(g\circ u)(x)=\lim_{x\to a}g(u(x))=g(\lim_{x\to b}u(x))=g(b)=\lim_{u\to b}g(u).$$

Este resultado indica una manera práctica de calcular límites; se conoce como *técnica de sustitución.*

Ejemplo 4. Queremos hallar el límite cuando $x\to\frac{\pi}{2}$ de la función $g(x)=\tan\dfrac{1}{\frac{4}{\pi}+\cos^2 x}$. Llamando $u(x)=\dfrac{1}{\frac{4}{\pi}+\cos^2 x}$, tendremos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}u(x)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{4}{\pi}+\cos^2 x}=\frac{\pi}{4}$$

Luego, como la función $\tan u$ es continua para todo $u\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan\frac{1}{\frac{4}{\pi}+\cos^2 x}=\lim_{u\to\frac{\pi}{4}}\tan u=\tan\frac{\pi}{4}=1.$$

Podríamos usar esta técnica de sustitución cuando la función g no es continua en $u(a)=b$?. La respuesta a esta pregunta se encuentra en una propiedad, llamada de *Convergencia propia*, que es un poco delicada de aplicar.

Sin embargo, si g pertenece a cierto conjunto de funciones, podemos construir, a partir de g, una función que sea continua en $u(a)=b$ y que nos permitirá encontrar el límite que buscamos.

Supongamos que la función g verifica las siguientes condiciones:

- es continua en un entorno reducido de $u(a) = b$,

- no está definida en b porque el reemplazo directo de u por b en la fórmula que la define nos conduciría a una expresión carente de sentido,

- tiene límite cuando $u \to b$.

En este caso (g tiene una discontinuidad evitable en $u = b$), consideremos la función

$$\widetilde{g}(u) = \begin{cases} g(u) & \text{si } u \neq b, \\ \lim\limits_{u \to b} g(u) & \text{si } u = b, \end{cases}$$

que, por construcción, tiene las siguiente propiedades

- toma los mismos valores que $g(x)$ en un entorno reducido de b,

- es continua en b.

Entonces, tendremos

$$\lim_{x \to a} (g \circ u)(x) = \lim_{x \to a} g(u(x)) = \lim_{x \to a} \widetilde{g}(u(x)) = \widetilde{g}(\lim_{x \to a} u(x)) = \widetilde{g}(b) = \lim_{u \to b} g(u).$$

Ejemplo 5. Queremos hallar el $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(x - \pi)}{x - \pi}$. Entonces, consideremos las funciones $u(x) = x - \pi$ y $g(u) = \dfrac{\sin u}{u}$. Cuando $x \to \pi$, se tiene que $u \to 0$. Como la función g verifica todas las condiciones pedidas en un entorno de $u = 0$ (*verifíquenlo como ejercicio*), tendremos

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Ejemplo 6. Queremos hallar el $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt[6]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$. Considerando las funciones $u(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(u) = \dfrac{1 - \sqrt{u}}{1 - u}$, vemos que $(g \circ u)(x) = \dfrac{1 - \sqrt[6]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$. Ahora, cuando $x \to 1$, se tiene que $u \to 1$ y, como la función g verifica todas las condiciones pedidas en un entorno de $u = 1$ (*verifíquenlo como ejercicio*), tendremos

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt[6]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{u \to 1} \frac{1 - \sqrt{u}}{1 - u} = \lim_{u \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{u}} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 7. Queremos hallar el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{1 - \cos x}}$. Llamando $u(x) = 1 - \cos x \geq 0$ para todo x, tendremos,

$$|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - (1 - u)^2} = \sqrt{2u - u^2},$$

$$\frac{|\sin x|}{\sqrt{1 - \cos x}} = \frac{\sqrt{2u - u^2}}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{2u - u^2}{u}}.$$

Llamando $g(u) = \sqrt{\frac{2u - u^2}{u}}$, comprobamos que la función g verifica todas las condiciones pedidas en un entorno a derecha de $u = 0$ (*verifíquenlo como ejercicio*). Entonces,

$$\lim_{x \to 0} \frac{|\sin x|}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{u \to 0^+} \sqrt{\frac{2u - u^2}{u}} = \lim_{u \to 0^+} \sqrt{2 - u} = \sqrt{2}.$$

Ejercicio 5. Utilicen la técnica de sustitución para calcular el valor de L.

a) $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$ Rta.: $L = 2$

b) $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$ Rta.: $L = \frac{5}{3}$

c) $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$ Rta.: $L = \frac{9}{5}$

d) $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ Rta.: $L = 0$

d) $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{\sin 2x}$ Rta.: $L = \frac{1}{2}$

Observación importante. Hay que chequear siempre que se verifiquen las condiciones sobre g; de lo contrario, la regla de sustitución puede conducirnos a un resultado incorrecto. En el siguiente cuadro se muestra un ejemplo de esto.

Sea $g(u) = \begin{cases} u & \text{para } u \neq 1 \\ 2 & \text{para } u = 1 \end{cases}$; no es continua en $u = 1$ pero $\lim_{u\to 1} g(u) = 1$.

a) Sea $u(x) = \sqrt{1+x}$. En este caso,

$$g(u(x)) = g(\sqrt{1+x}) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{para } \sqrt{1+x} \neq 1 \\ 2 & \text{para } \sqrt{1+x} = 1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{para } x \neq 0 \\ 2 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

y, por lo tanto, tendremos

$$\lim_{x\to 0} (g \circ u)(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1.$$

Por otro lado, como $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$, y $\lim_{u\to 1} g(u) = 1$, se verifica

$$\lim_{x\to 0} (g \circ u)(x) = \lim_{u\to 1} g(u).$$

b) Sea $u(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$. En este caso, también $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$, pero

$$(g \circ u)(x) = g(u(x)) = g(1) = 2 \quad x \neq 1.$$

y, por lo tanto, tendremos

$$\lim_{x\to 0} (g \circ u)(x) = 2 \neq \lim_{u\to 1} g(u).$$

En ambos ejemplos, la función $g(u)$ tiene una discontinuidad evitable en $u = 1$. Si la reemplazamos por

$$\widetilde{g}(u) = \begin{cases} u & u \neq 1 \\ 1 & u = 1 \end{cases} = u,$$

obtendríamos

- el resultado correcto en el caso a),
- el resultado incorrecto en el caso b).

Por qué tenemos este problema? Porque, en este ejemplo, no se satisface la segunda condición: $g(u)$ está definida en $u = 1$ y, por lo tanto, no podemos garantizar (sin hacer un análisis más delicado) que el uso de la técnica de sustitución nos conduzca al resultado correcto.

1.3 Derivada de una composición de funciones

El resultado que enunciaremos a continuación se conoce como regla de la cadena.

Sean dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$, tales que $\operatorname{Im} f \subset B$. Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces $(g \circ f)$ es derivable en a y se verifica

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Ejemplo 8. Queremos calcular la derivada de la función $h(x) = \sin(2x^3 - x)$ en un punto x_0 cualquiera. Observemos primero que

- $h(x)$ puede pensarse como la composición de $f(x) = 2x^3 - x$ con $g(x) = \sin x$,
- como f y g son derivables en $\mathbb{R}$, entonces, h será derivable en $\mathbb{R}$.

Sea x_0 un número real cualquiera. Usando la regla de la cadena, tendremos

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = \cos(2x_0^3 - x_0)(6x_0^2 - 1).$$

En la práctica, la aplicación de la regla de la cadena es un procedimiento que consta de los siguientes pasos:

a) se identifican las funciones que intervienen en la composición, desde el exterior al interior de la expresión; en el ejemplo anterior:

$$h(x) = \overbrace{\sin(\ \underbrace{2x^3 - x}_{\text{función interior}}\ )}^{\text{función exterior}}$$

b) se deriva la función exterior tratando a la función interior como si fuera la variable independiente:

$$\cos(2x^3 - x)$$

c) se multiplica al resultado anterior por la derivada de la función interior:

$$\cos(2x^3 - x)(6x^2 - 1).$$

Ejercicio 6. Escriban a la función h como una composición de funciones (identifiquen a la función interior y a la función exterior e indiquen los dominios de derivabilidad de cada una de ellas); luego encuentren su derivada utilizando la regla de la cadena.

a) $h(x) = \sqrt{1 - x^3}$ Rta.: $h'(x) = -\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}}, \quad x \in (-\infty, 1)$

b) $h(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{3/2}$ Rta.: $h'(x) = \dfrac{3}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{1/2}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right), \quad x \in (0, \infty)$

c) $h(x) = e^{-(1+x^2)}$ Rta.: $h'(x) = -2xe^{-(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $h(x) = \ln(\cosh x)$ Rta.: $h'(x) = \tanh x, \quad x \in \mathbb{R}$

e) $h(x) = \cos(1 - e^x)$ Rta.: $h'(x) = \sin(1 - e^x)e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

f) $h(x) = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^2$ Rta.: $h'(x) = 4\dfrac{(x - 1)}{(x + 1)^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Ejercicio 7. Supongan que $f(x) > 0$ y derivable para todo número real x. Comprueben que

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ejercicio 8. Supongan que $f(x)$ es derivable en todo su dominio. Comprueben que

$$(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}.$$