PROGRESIONES

1. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

1.1. Definición

Una progresión aritmética (ordinaria) es una serie de números de forma que cada uno de ellos se obtiene del anterior sumándole una cantidad constante que llamamos diferencia, es decir, si $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ es una progresión aritmética, entonces la diferencia es $d = a_n - a_{n-1}$ y el término general de la progresión es:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ejemplos:

1) El término general de la sucesión

$$5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots$$

es

$$a_n = 3n + 2$$

Se trata de una progresión aritmética con diferencia $d = 3$, ya que cada término de la misma es igual al anterior más tres. Así,

$$a_n = 5 + 3(n-1)$$

2) La sucesión de los números pares

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

también es una progresión aritmética de diferencia $d = 2$, ya que cada término de la misma es igual al anterior más dos. Así,

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2$$

1.2. Obtención del término general en función de otro cualquiera

Si a_n es una progresión aritmética, se tiene que

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

y, por tanto

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

Despejamos a_1 de (1) y (2), obtenemos:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = a_k - (k-1)d$$

Igualando, resulta:

$$a_n - (n-1)d = a_k - (k-1)d$$

de donde

$$a_n = a_k - kd + d + nd - d = a_k + (n-k)d$$
$$a_n = a_k + (n-k)d$$

1.3. Suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética

Además, la suma de n términos se puede calcular por la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ejemplos:

1) Consideramos la sucesión aritmética de diferencia 3:

5, 8, 11, 14, 17, 20, …

y vamos a sumar los 20 primero términos:

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 5 \\ a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 = 62 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{20} = \frac{5+62}{2} \cdot 20 = 670$$

2) Consideramos la sucesión aritmética de diferencia 2:

2, 4, 6, 8, 10, …

y vamos a sumar los 100 primero términos:

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_{100} = 2 + 99 \cdot 2 = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{100} = \frac{2+200}{2} \cdot 100 = 10\ 100$$

1.4. Interpolación de términos en una progresión aritmética

Interpolar m términos entre dos números dados a y b es formar una progresión aritmética con $m+2$ términos de forma que el primero y el último sean los números que nos dan, esto es, hay que hallar m números $a_1, a_2, ..., a_m$ tales que $a, a_1, a_2, ..., a_m, b$ sea una progresión aritmética de $m+2$ términos.

En este caso se tiene que la diferencia es:

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

Ejemplo:

Interpolar 5 medios aritméticos entre –18 y 25.

La progresión aritmética es: $-18, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 25$.

Como $a = -18$ y $b = 25$, la diferencia es

$$d = \frac{25-(-18)}{5+1} = \frac{43}{6}$$

y, por tanto,

$$a_1 = -18 + \frac{43}{6} = -\frac{65}{6}$$

$$a_2 = -\frac{65}{6} + \frac{43}{6} = -\frac{11}{3}$$

$$a_3 = -\frac{11}{3} + \frac{43}{6} = \frac{7}{2}$$

$$a_4 = \frac{7}{2} + \frac{43}{6} = \frac{32}{3}$$

$$a_5 = \frac{32}{3} + \frac{43}{6} = \frac{107}{6}$$

Así, la progresión aritmética buscada es: $-18,\ -\frac{65}{6},\ -\frac{11}{3},\ \frac{7}{2},\ \frac{32}{3},\ \frac{107}{6},\ 25\ 1$

1.5. Una curiosidad histórica

De niño Gauss (1777-1855) asistió a la escuela local, dirigida por un maestro de costumbres rutinarias. Un día, con objeto de tener a la clase atareada y en silencio durante un buen rato, el maestro tuvo la idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuera terminando cada uno esta área, deberían colocar su pizarra sobre la mesa del maestro. Casi inmediatamente colocó Gauss su pizarra sobre la mesa, diciendo: "ya está"; el maestro lo miró desdeñosamente mientras los demás trabajaban con ahínco. Cuando todos hubieron terminado y el maestro revisó al fin los resultados obtenidos, se encontró con la sorpresa notable de que la única pizarra en la que aparecía la respuesta correcta, 5050, sin ningún cálculo accesorio, era la de Gauss. El muchachito de 10 años había hecho evidentemente el cálculo mental de sumar la progresión aritmética 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100 asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente utilizando la fórmula $\left(m+1\right)\frac{m}{2}$. No es pues extraño que ahora se le conozca como el Príncipe de las Matemáticas.

2. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

2.1. Definición

Una progresión geométrica es una serie de números de forma que cada uno de ellos se obtiene del anterior multiplicado por una cantidad constante llamada razón, es decir, si $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ es una progresión geométrica, entonces la razón es $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ y el término general de la progresión es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ejemplos:

1) La sucesión

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

es una progresión geométrica de razón $r = 2$, ya que cada término de la misma es igual al anterior multiplicado por dos. Así,

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

2) La sucesión

$$2,\ -2,\ 2,\ -2,\ 2,\ -2,\ ...$$

es una progresión geométrica de razón $r = -1$, ya que cada término de la misma es igual al anterior multiplicado por menos uno. Así,

$$a_n = 2 \cdot \left(-1\right)^{n-1}$$

3) La sucesión

$$4,\ -2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ ...$$

es una progresión geométrica de razón $r = -\frac{1}{2}$, ya que cada término de la misma es igual al anterior multiplicado por menos un medio. Así,

$$a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2.2. Suma y producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica

El producto de n términos de una progresión geométrica es:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

(tomaremos + cuando $P_n \geq 0$ y $-$ en caso contrario) y la suma de n términos es:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

o lo que es lo mismo

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$$

y si $r = 1$, entonces

$$S_n = n \cdot a_1$$

Ejemplos:

1) El producto de los 10 primeros términos de progresión geométrica

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,\ a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

es:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_{10} = 2^9 = 512 \end{array}\right\} \rightarrow P_{10} = \sqrt{(a_1 a_{10})^{10}} = \sqrt{(1 \cdot 512)^{10}} = 512^5$$

La suma de los 10 primeros términos es:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_{10} = 2^9 = 512 \end{array}\right\} \rightarrow S_{10} = \frac{a_1 - a_{10} \cdot r}{1-r} = \frac{1 - 512 \cdot 2}{1-2} = 1023$$

2) El producto de los 100 primeros términos de progresión geométrica

$$2,\ -2,\ 2,\ -2,\ 2,\ -2,\ \ldots\ ,\ a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

es:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_{100} = 2 \cdot (-1)^{99} = -2 \end{array}\right\} \rightarrow P_{100} = \sqrt{(a_1 a_{100})^{100}} = \sqrt{(2 \cdot (-2))^{100}} = 4^{50}$$

La suma de los 100 primeros términos es:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_{100} = -2 \end{array}\right\} \rightarrow S_{100} = \frac{a_1 - a_{100} \cdot r}{1-r} = \frac{2 - (-2) \cdot (-1)}{1 - (-1)} = 0$$

2.3. Suma de todos los términos de una progresión geométrica

Se tiene que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 r^{n-1} < +\infty \Leftrightarrow |r| < 1$$

(esa suma infinita, significa que estamos calculando el límite de la sucesión $a_1 \cdot r^{n-1}$)
en cuyo caso

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

Ejemplo:

La suma de todos los términos de la progresión geométrica:

$$4,\ -2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ ...$$

es:

$$S=\frac{4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{3}$$

2.4. Interpolación de términos en una progresión geométrica

Interpolar m términos entre dos números dados a y b es formar una progresión geométrica con $m+2$ términos de forma que el primero y el último sean los números dados.

En este caso se tiene que la razón es:

$$r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Ejemplo:

Interpolar 4 medios geométricos entre 128 y 4.

La progresión geométrica es: $128, a_1, a_2, a_3, a_4, 4$.

Como $a=128$ y $b=4$, la razón es

$$r=\sqrt[4+1]{\frac{4}{128}}=\frac{1}{2}$$

y, por tanto,

$$a_1=128\cdot\frac{1}{2}=64$$

$$a_2=64\cdot\frac{1}{2}=32$$

$$a_3=32\cdot\frac{1}{2}=16$$

$$a_4=16\cdot\frac{1}{2}=8$$

Así, la progresión aritmética buscada es: 128, 64, 32, 16, 8, 4 1

2.5. La leyenda del Ajedrez

Una leyenda cuenta que el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India que estaba muy apenado por la pérdida de uno de sus hijos en una batalla. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle generosamente, para lo cual le dijo: “Pídeme lo que quieras, que te lo daré”.

El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:

“Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64”.

La sorpresa fue cuando el secretario del príncipe calculó la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor, porque toda la Tierra sembrada de trigo era insuficiente para obtener el trigo que pedía el inventor.

¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?

Utiliza la calculadora para hallar el total de granos de trigo:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$$

Es decir, ¡18 446 744 073 709 551 615 granos de trigo!
El rey quedó boquiabierto, ¡jamás podría haber imaginado que lo que el sabio le pedía era imposible de pagar incluso con sus enormes riquezas! No obstante, satisfecho por haber conseguido que el rey volviera a estar feliz y por la lección matemática que le había dado al reino, el inventor renunció al presente.

3. Resumen

	Progresiones aritméticas	Progresiones geométricas
Definición: Forma recurrente	$a_n = a_1 + d$	$a_n = a_{n-1} \cdot r$
Término general	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
Suma de n términos	$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	$S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$
Suma de todos los términos		$S = \dfrac{a_1}{1-r}$ siempre que $\lvert r \rvert < 1$
Producto de n términos		$P_n = \pm\sqrt{(a_1 a_n)^n}$