UNIDAD

3 Probabilidad con técnicas de conteo

Objetivos

Al finalizar la unidad, el alumno:

- distinguirá y utilizará las reglas de multiplicación y de suma para el cálculo de la cantidad de arreglos con y sin orden
- explicará cómo se traza un diagrama de árbol para el conteo de arreglos con orden
- identificará y explicará qué es una permutación
- resolverá problemas de permutaciones con y sin reemplazo
- manejará las permutaciones con elementos iguales
- identificará y explicará qué es una combinación
- resolverá ejercicios y problemas usando combinaciones
- resolverá problemas referentes a la teoría de las probabilidades empleando las técnicas de conteo

Introducción

El análisis combinatorio es una rama de las matemáticas discretas de gran aplicación, como la teoría de las probabilidades y el análisis de algoritmos, entre otras. Las aplicaciones de la teoría combinatoria están basadas en el empleo de métodos para cuantificar los diferentes tipos de arreglos que se obtienen con los elementos de uno o más conjuntos.

Puesto que en la teoría de las probabilidades no siempre es fundamental encontrar todos los puntos muestrales, basta conocer la cantidad de éstos; en particular, cuando se aplica la definición de probabilidad, es decir, cuando el espacio muestral se considera uniforme, el cálculo de la probabilidad de un evento requiere una división de la cantidad de elementos del evento entre la cantidad de elementos del espacio muestral, por lo que es necesario conocer las técnicas que se pueden aplicar para calcular la cantidad de puntos muestrales en un experimento.

En esta unidad se analizan varios conjuntos y sus arreglos por medio de dos reglas elementales de conteo: *regla de multiplicación* y *regla de suma*. En ocasiones los arreglos se grafican por medio de *diagramas de árbol*. También se trabajarán por separado los casos especiales de los arreglos que se forman con una parte o todos los elementos de un conjunto cuando el orden en que se coloquen éstos sea importante –*permutaciones*– y la elección de los elementos se realice con o sin reemplazo; se ampliará el estudio de los casos con elementos iguales en un conjunto y los casos cuando el orden entre los elementos de los arreglos no es importante –*combinaciones*–.

Esta unidad termina con la parte numérica del cálculo de probabilidades donde se emplearán las técnicas de conteo estudiadas.

3.1 Regla de multiplicación

¿Es posible concluir que en este proceso de conteo el orden entre los elementos de un arreglo es importante?

La regla de multiplicación aplicada a dos conjuntos consiste en que dados los conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, se quiere saber cuántas parejas diferentes se pueden formar con sus elementos si se coloca un elemento del conjunto A y posteriormente un elemento del conjunto B.

Primero se elige un elemento cualquiera del conjunto A y se relaciona con cada uno de los elementos del conjunto B, de tal forma que se obtienen m arreglos diferentes (puesto que B contiene m elementos)

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_1b_3, \ldots,\ a_1b_m$$

Después se escoge un segundo elemento del conjunto A, y se relaciona con cada uno de los elementos del conjunto B y se obtienen otros m arreglos, los cuales son todos diferentes respecto de los que se formaron antes, ya que se combinaron elementos diferentes del conjunto A

$$a_2b_1,\ a_2b_2,\ a_2b_3, \ldots,\ a_2b_m$$

Continuando el proceso se tienen $n \times m$ parejas distintas que contienen un elemento de cada conjunto. En estos arreglos se escriben primero los elementos del conjunto A seguidos de los del B. El proceso se puede generalizar para el caso de k conjuntos, y resulta la siguiente definición.

Definición 3.1

Dados $A_1, \ldots, A_k$ k conjuntos diferentes y $n_1, n_2, \ldots, n_k$ las cantidades respectivas de elementos de dichos conjuntos, entonces la cantidad de arreglos diferentes que contienen un elemento de cada conjunto, escribiendo primero los elementos del conjunto uno seguidos de los del conjunto dos, sucesivamente hasta llegar al conjunto k, se llama ***regla generalizada de multiplicación****, y está dada por*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Ejemplo 1

1. Se tienen ocho libros de física, cuatro de química y siete de matemáticas, todos ellos diferentes, ¿cuántos arreglos de tres libros, que contengan un libro de cada tema, se pueden formar con todos los libros si primero van los de física, seguidos por química y matemáticas?

   Con los datos anteriores y el uso de la regla de multiplicación, que indica el total de arreglos de libros diferentes de cada tema, se obtiene

$$8 \times 4 \times 7 = 224$$

2. Para ir de la ciudad A a la ciudad B existen tres caminos, de la ciudad B a la C existen cuatro, de la ciudad C a la D dos, ¿dé cuántas maneras se puede ir de la ciudad A a la D, sin pasar por la misma ciudad más de una vez?

   Con los datos anteriores y con el uso de la regla de multiplicación, el total de caminos diferentes para ir de A a D es

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

Ejercicio 1

1. ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar con las letras a, r, m y los números 3, 5, 6 y 8, si primero va la letra y después el número?
2. Para viajar de la ciudad de México a Veracruz existen tres caminos y de Veracruz a Tabasco también tres, calcula de cuántas formas puede viajar una persona de México a Tabasco si debe pasar por Veracruz.
3. Una persona quiere regalar dulces de tres tipos a su hijo: chocolate, caramelo y goma de mascar; entra a una tienda donde hay doce variedades de chocolates, quince de caramelos y diez de goma de mascar, calcula de cuántas maneras puede integrar el arreglo de dulces.

3.2 Diagramas de árbol

El nombre *diagrama de árbol* se debe a su forma, ya que con los elementos de los diferentes conjuntos que se estudian se construyen ramificaciones, con las cuales se obtienen todos los arreglos posibles.

Definición 3.2

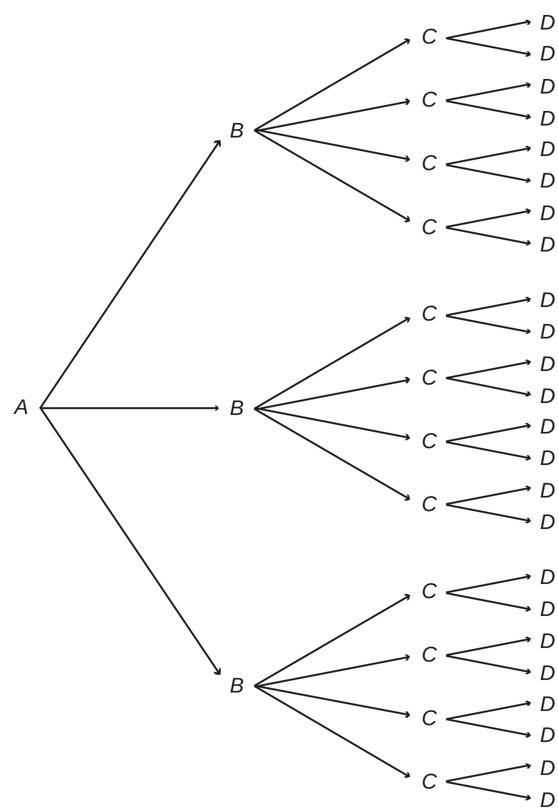
*El **diagrama de árbol** es una forma gráfica de encontrar todos los arreglos que se pueden formar con los diferentes elementos de los conjuntos que se tiene. Un* arreglo ***es una ramificación –desde su punto inicial hasta su punto final–, donde cada ramificación debe tener un elemento de cada conjunto.***

Ejemplo 2

Retomando los datos del ejemplo 1, numeral 2, es posible resolver el problema mediante un diagrama de árbol.

Primero se representa en un punto a la ciudad *A*, después se trazan, a partir de este punto, tres líneas rectas para los tres caminos de la ciudad *A* a la *B*; de igual forma, de cada punto que representa a la ciudad *B*, se trazan cuatro líneas para los cuatro caminos de la ciudad *B* a la *C;* finalmente, de cada punto que representa la ciudad *C,* se trazan dos líneas para los dos caminos de la ciudad *C* a la *D*.

Diagrama 3.1
Diagrama de árbol de los diferentes caminos para viajar de la ciudad *A* a la *D*.



El diagrama 3.1 muestra todos los caminos posibles para viajar de la ciudad *A* a la *D*, pasando por las ciudades *B* y *C*, los cuales se pueden obtener al unir rectas desde el punto *A* al *D* sin regresar por ningún camino.

Como se observa, los diagramas de árbol son bastante sencillos y muestran todos los arreglos posibles. Sin embargo, en los casos en que la cantidad de elementos es grande, se tiene también una cantidad grande de ramificaciones, y trazarlo ya no sería factible. No obstante, como se verá en la siguiente unidad, los diagramas de árbol tienen gran aplicación al resolver problemas de probabilidad condicional.

Ejercicio 2

1. ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar con las letras *a*, *r*, *m* y los números 3, 5, 6 y 8, si primero va la letra y después el número? Resuelve mediante diagramas de árbol.
2. Para viajar de la ciudad de México a Veracruz existen tres caminos y de Veracruz a Tabasco también, calcula de cuántas formas puede viajar una persona de México a Tabasco, si debe de pasar por Veracruz. Resuelve mediante diagramas de árbol.

3.3 Arreglos con y sin reemplazo

¿La regla de multiplicación se aplica únicamente a conjuntos diferentes?

Al aplicar la regla de multiplicación se debe tomar en cuenta que no sólo se emplea con diferentes conjuntos sino que puede estar aplicada a un mismo conjunto en los casos que se pida realizar arreglos con todos o alguna parte de sus elementos. Dichos arreglos, sin embargo, pueden ser de dos tipos: cuando se *permite el reemplazo* (o *repetición*) y cuando *no se permite*.

3.3.1 Arreglos con reemplazo

¿En qué condiciones se obtiene un arreglo con reemplazo?

Se dice que los *arreglos* son *con reemplazo* o *con repetición* cuando después de tomar un elemento éste se puede tomar nuevamente cada vez que se realice otra extracción. Es decir, si se tiene un conjunto A con n elementos diferentes y se realiza una extracción, ésta se podrá hacer de n formas diferentes.

Dado el conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, se pide formar arreglos diferentes que contengan k elementos del conjunto en el cual se permite el reemplazo. Por la regla de multiplicación (definición 3.1), esto es equivalente a tener k conjuntos iguales de los cuales se forman arreglos diferentes que contengan un elemento de cada conjunto, de tal forma que del primer conjunto se tendrán n elementos para escoger uno, del segundo conjunto también n elementos –puesto que se permite la repetición–, sucesivamente k veces, lo que se expresa

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ veces}} = n^k \text{ arreglos diferentes}$$

Definición 3.3

> *Dado el conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con n elementos diferentes, la cantidad de arreglos que contengan k elementos tomados **con reemplazo** del conjunto A está dada por*
>
> $$n^k$$

Ejemplo 3

¿Cuántos números diferentes de placas se pueden formar con los números dígitos y las letras del alfabeto, si cada placa consta de tres letras y tres dígitos y se permite la repetición?

Cada letra del arreglo se puede elegir de 26 maneras, ya que se permite la repetición, al igual que cada dígito del arreglo se puede escoger de diez maneras, por tanto

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^3 \times 10^3 \text{ placas diferentes}$$

3.3.2 Arreglos sin reemplazo (permutaciones)

¿En qué condiciones se obtiene un arreglo sin reemplazo?

Los *arreglos* son *sin reemplazo* o *sin repetición* cuando después de tomar un elemento, éste no se puede tomar de nuevo. Es decir, si se tiene un conjunto $A_1 = \{a_1, a_2,..., a_n\}$ con n elementos diferentes y se realiza una extracción, ésta se podrá hacer de n maneras diferentes. Sea el elemento tomado a_3, éste ya no se regresa al conjunto teniendo un conjunto $A_2 = \{a_1, a_2, a_4, a_5,..., a_n\}$ con $n - 1$ elementos diferentes, de forma tal que cuando se realice una segunda extracción será de $n - 1$ maneras.

Sea el conjunto $A = \{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$, se pide formar arreglos diferentes que contengan k elementos elegidos del conjunto sin reemplazo. Por la regla de multiplicación, esto es equivalente a tener k conjuntos, de manera que del primer conjunto se tendrán n elementos para tomar uno, del segundo conjunto $n - 1$ elementos (puesto que no se permite el reemplazo), sucesivamente hasta llegar al k-ésimo conjunto, el cual contendrá $(n - (k - 1))$ elementos diferentes para tomar uno. Con la regla de multiplicación la cantidad de arreglos diferentes que se puedan formar con los k conjuntos está dada por

$$\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(k-1))}_{k \text{ elementos}} \text{ arreglos diferentes}$$

Definición 3.4

> *Dado el conjunto $A = \{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ con n elementos diferentes, la cantidad de arreglos ordenados que contengan k elementos tomados* ***sin reemplazo*** *del conjunto A está dado por la resultante de*
>
> $$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times (n - (k - 1))$$

Ejemplo 4

¿Cuántas placas diferentes se pueden formar con los números dígitos y las letras del alfabeto, si cada placa consta de tres letras y tres dígitos si no se permite la repetición?

La primera letra se puede elegir de 26 maneras, la segunda las 25 restantes, la tercera 24. En el caso de los números se escogerán el primero de diez maneras, el segundo nueve y el tercero ocho. Finalmente, por la definición 3.4 y la regla de multiplicación se tiene que la cantidad de arreglos es

$$(26 \times 25 \times 24) \times (10 \times 9 \times 8) = 11\,232\,000$$

La expresión para los arreglos sin repetición se simplifica introduciendo la siguiente definición.

Definición 3.5

> *El* ***factorial de un número*** *$n \in \mathbb{N}$ se define como el producto sucesivo $n(n - 1)(n - 2)\ldots1$ y se simboliza por $n!$*

Nota Por definición, $0! = 1$.

Con la definición 3.5 se puede representar la expresión de la definición 3.4 de forma simplificada.

Se multiplica y se divide la expresión de la definición 3.4 por $(n-k)!$

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-(k-1)) =$$
$$= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-(k-1))(n-k)\times\cdots\times 2\times 1}{(n-k)\times\cdots\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

De tal forma que a partir de la expresión anterior es posible introducir una definición equivalente a la 3.4.

Definición 3.6

Se llama ***permutación*** *de k elementos escogidos de un total n (todos diferentes) a*

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!},\ 0 \le k \le n$$

que representa la cantidad total de arreglos ordenados de tamaño k que se pueden formar con n elementos diferentes cuando no se permite la repetición.

Ejemplo 5

1. Se calcula

   a) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
   b) $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$
   c) $P_7^{10} = \dfrac{10!}{(10-7)!} = \dfrac{3\,628\,800}{6} = 604\,800$
   d) $P_4^{200} = \dfrac{200!}{(200-4)!} = \dfrac{200\times 199\times 198\times 197\times 196!}{196!} = 200\times 199\times 198\times 197 = 1\,552\,438\,800$

2. Se encuentra el valor de n de acuerdo con la igualdad $P_3^n = 8P_2^{n-1}$

   Empleando la definición 3.6, se tiene

$$P_3^n = \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-3)!}$$

   por otro lado

$$8P_2^{n-1} = 8\frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} = 8\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

   igualando estas dos últimas expresiones, resulta

$$\frac{n(n-1)!}{(n-3)!} = 8\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$
$$n = 8$$

3.3.3 Permutaciones con elementos iguales

¿Cuántos elementos iguales puede haber en un arreglo?

Para los casos en que se quieren formar arreglos con todos los elementos de un conjunto, entre los cuales existen algunos que son iguales, se tiene que, de forma general, cuando existen n_1 elementos iguales, n_2 elementos iguales,... y n_m elementos iguales, tales que $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$, resulta la cantidad total de ordenamientos diferentes considerando todos los n elementos por ordenamiento

$$P^{n}_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}; \text{ con } n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n \qquad (1)$$

Ejemplo 6

1. Se tienen cuatro computadoras X, tres computadoras Y y tres computadoras W; ¿de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar en línea recta?

   Se tienen en total diez computadoras, de las cuales existen cuatro, tres y tres de cada tipo, por la fórmula 1, se tiene

$$\frac{10!}{4!3!3!} = 4\ 200 \text{ (total de arreglos diferentes)}$$

2. ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar con todas las letras de la palabra *Guanajuato*?

   Aquí el problema es que existen elementos iguales, se tienen tres letras a, dos u y sólo una de las siguientes g, n, j, t y o. Por la fórmula 1, se tiene

$$\frac{10!}{3!2!1!1!1!1!1!} = 302\ 400 \text{ permutaciones diferentes}$$

Ejercicio 3

1. Calcula

a) P^{12}_{6}

b) P^{9}_{5}

2. Calcula, sin emplear la calculadora, P^{453}_{2}

3. Calcula valor de n que hace que se cumpla $P^{n}_{8} = 8!$

4. Una persona acomoda en un estante de una librería seis libros de filosofía, cuatro de química y ocho de historia. De cuántas formas se pueden acomodar los libros si

a) los de historia siempre deben de ir juntos
b) los libros deben de ir separados por materias

5. Considera todas las letras de la palabra *Cuitláhuac*, calcula la cantidad de arreglos diferentes que se pueden formar considerando todas las letras.

6. Se pide tomar seis números, uno tras otro sin reemplazo de un total de 44, calcula cuántos arreglos diferentes se pueden formar.

7. Cuatro parejas (cuatro hombres y cuatro mujeres) van a ir al teatro; compraron ocho boletos en la misma fila.

a) calcula de cuántas maneras diferentes se pueden colocar las cuatro parejas sin que alguna quede separada

b) calcula de cuántas maneras diferentes se pueden colocar las ocho personas, si se toman dos hombres para que no se sienten juntos?

3.4 Combinaciones

En la sección anterior se analizaron las permutaciones, arreglos en los que el orden entre sus elementos es de suma importancia, por tanto, la permutación *ab* es diferente al arreglo *ba*.

En la presente sección se verán los arreglos en los que *el orden entre sus elementos no importa*, es decir, dado un conjunto de n elementos distintos se desea contar el número de subconjuntos no ordenados de tamaño k. Por ejemplo, dado un grupo de 40 estudiantes, se piden tres alumnos para que representen al grupo. En este caso no es importante el orden de los alumnos.

Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 3.7

Dado un conjunto con n elementos diferentes, se llama ***combinación*** *a cualquier subconjunto no ordenado de tamaño k. El número de combinaciones de tamaño k que se pueden formar con los n elementos se denota por*

$$C_k^n,\ 0 \le k \le n$$

Considerando la misma cantidad de elementos, ¿qué cantidad será mayor, una permutación o una combinación?

Como C_k^n representa la cantidad de subconjuntos no ordenados que constan de k elementos tomados de un total de n, se tiene que en cada una de esas combinaciones se pueden formar $k!$ arreglos diferentes. Por tanto, si C_k^n representa la cantidad total de subconjuntos no ordenados formados de k elementos diferentes, $k!\,C_k^n$ representa la cantidad de arreglos diferentes de k elementos tomados de un total n. Como se analizó en la sección 3.3.2, esta cantidad es igual a P_k^n, de donde se deduce

$$P_k^n = \mathrm{k}!\,C_k^n$$

Despejando C_k^n

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ 0 \le k \le n \tag{2}$$

Nota

Una diferencia fundamental entre las permutaciones y las combinaciones consiste en que en el orden de los elementos de los grupos escogidos en las combinaciones no importan, sólo se considera la cantidad de elementos en el grupo, mientras que en las permutaciones el orden entre sus elementos es fundamental.

Permutaciones $ab \neq ba$
Combinaciones $\{a, b\} = \{b, a\}$

En algunos textos para la notación combinatoria también se denota

$$\binom{n}{k} \text{ o } {}_nC_k$$

esta última suele emplearse en las calculadoras junto con la de ${}_nP_k$ para las permutaciones.

Ejemplo 7

1. Se calcula

   a) $C_3^{10} = \dfrac{10!}{3!(10-3)!} = 120$

   b) $C_4^{15} = \dfrac{15!}{4!(15-4)!} = 1\,365$

2. ¿Cuántos grupos de dos elementos se pueden formar de un conjunto que contiene cinco elementos?

   Como en estos casos no importa el orden entre los elementos, con la fórmula 2, se tiene

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

   Diez es el total de grupos diferentes con dos elementos cada uno. Por ejemplo, si el conjunto es $\{a, b, c, d, e\}$, los grupos de dos elementos son

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$$

3.4.1 Propiedades en el cálculo de C_k^n

Calcular las combinatorias por medio de su definición formal puede resultar pesado; en algunos casos se pueden simplificar mediante las siguientes propiedades numéricas.

1. $C_k^n = C_{n-k}^n$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$

   Por definición de combinatoria se tiene

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   por tanto,

$$C_{n-k}^n = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^n$$

2. $C_0^n = C_n^n = 1$; para toda $n \in \mathrm{N}$

$$C_0^n = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1, \text{ después por la propiedad 1, se da } C_n^n = 1 \text{ ya que } n + 0 = n$$

3. $C_1^n = C_{n-1}^n = n$, para toda $n \in \mathrm{N}$

$$C_1^n = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1(n-1)!} = n, \text{ después por la propiedad 1, se da } C_{n-1}^n = n \text{ ya que } n-1+1=n$$

4. $C_k^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$

Ejercicio 4

1. Calcula

a) C_6^{12}

b) C_4^9

2. Calcula, sin emplear la calculadora

a) C_2^{450}

b) C_{346}^{348}

3. Encuentra el valor de k o n, que cumpla la igualdad correspondiente

a) $P_4^n = 5!C_3^{n-1}$

b) $C_k^4 = C_k^6$

4. Se pide tomar seis números a la vez de un total de 44, calcula cuántas combinaciones es posible hacer si el orden no es importante.

5. Calcula de cuántas maneras se pueden colocar ocho torres en un tablero de ajedrez de tal forma que ninguna de ellas se enfrente, es decir, no se ubiquen dos o más en una misma línea vertical u horizontal si

a) todas las torres son del mismo color
b) hay cuatro torres blancas y cuatro negras

6. Un examen de métodos numéricos está formado por tres temas. El tema *A* contiene seis preguntas, el tema *B* cuatro y el tema *C* ocho preguntas, y se tienen que contestar tres preguntas de cada tema, calcula de cuántas maneras diferentes un estudiante puede elegir sus preguntas.

3.5 Regla de suma

Existen muchos problemas relacionados con las permutaciones o combinaciones donde para encontrar la cantidad total de arreglos se tiene que recurrir a diferentes tipos de éstos. Por ejemplo, se va a formar un comité de cinco personas de un grupo de 20, de los cuales tres son hermanos, ¿de cuántas maneras se puede formar el comité, si deben estar por lo menos dos de los hermanos?

Se pueden formar los arreglos de dos maneras:

1. Cuando de las cinco personas seleccionadas estén dos de los hermanos.
2. Cuando de las cinco personas seleccionadas estén los tres hermanos.

La respuesta al problema es la suma de los arreglos puesto que los dos cumplen la condición de tener por lo menos dos de los hermanos en el comité.

Por lo expuesto es posible concluir que si A y B son dos tipos de arreglos diferentes y el total de arreglos A ocurre de n maneras e igualmente el total de arreglos B ocurre de m maneras, entonces el total de arreglos de ambos tipos ocurre de $n + m$ maneras.

Ésta es una regla que se puede generalizar con la siguiente definición.

Definición 3.8

Dados $A_1, A_2,..., A_m$ diferentes tipos de arreglos que pueden ocurrir de las maneras $n_1, n_2,..., n_m$, respectivamente, el total de arreglos de todos los m tipos ocurrirá de $n_1 + n_2 + ... + n_m$ maneras. A esto se le llama ***regla de suma****.*

Nota

La aplicación de la regla de suma por lo general se realiza cuando aparecen en el enunciado del problema las frases: *a lo más* o *por lo menos*.

Ejemplo 8

1. Se va a formar un comité de cinco personas de un grupo de 20, de los cuales tres son hermanos; ¿de cuántas maneras se puede formar el comité, si deben estar por lo menos dos de los hermanos?

   Se pide que *por lo menos* dos de los tres hermanos integren el comité y se tienen dos tipos de arreglos.

   1. Cuando se tengan dos hermanos en el comité (el orden en este problema no es importante, ya que sólo interesa que en el comité existan cinco personas): puesto que se requieren cinco personas en el comité y dos de ellas deben elegirse de los tres hermanos, se tiene que, con el uso de la regla de multiplicación, esto podrá ocurrir de $C_2^3 \times C_3^{17}$ maneras, en donde C_2^3 representa la cantidad de maneras de escoger dos de los tres hermanos, mientras que C_3^{17} es la cantidad de maneras de escoger a las otras tres personas de los 17 restantes.
   2. Cuando en el comité se elijan los tres hermanos, lo cual ocurre de $C_3^3 \times C_2^{17}$ maneras, en donde C_3^3 representa la cantidad de maneras de escoger tres de los tres hermanos, mientras que C_2^{17} representa la cantidad de maneras de escoger a las otras dos personas de los 17 restantes.

Finalmente, con la regla de suma, el total de maneras en que pueden ocurrir los dos tipos de arreglos es

$$C_2^3 \times C_3^{17} + C_3^3 \times C_2^{17} = 3 \times 680 + 1 \times 136 = 2\ 176$$

2. Se va a formar un comité con un presidente, un secretario y un tesorero de un grupo de 20 personas, de las cuales tres son hermanos, ¿de cuántas maneras se puede formar el comité, si a lo más uno de los tres hermanos estará en el comité y cualquiera de las 20 personas puede estar en otro puesto?

   Se pide que *a lo más* uno de los tres hermanos integre el comité; se tienen dos tipos de arreglos:

   1. Cuando *ninguno* de los hermanos esté en el comité (el *orden* en el problema sí es importante, ya que nos interesa que en el comité las personas ocupen puestos determinados). Debido a que se requiere en el comité un presidente, un secretario y un tesorero, y ninguno de ellos debe ser uno de los tres hermanos, con la regla de multiplicación se tiene

Presidente Secretario Tesorero

$$\boxed{17}\boxed{16}\boxed{15} \Rightarrow 17 \times 16 \times 15 = P_3^{17} \text{ maneras}$$

Nota El número 17 en la primera casilla significa que dicho lugar puede ocuparlo cualquiera de las 17 personas (ninguno de los tres hermanos deberá estar), pero no representa al elemento 17. Lo mismo se aplica para las otras casillas.

   2. Cuando para el comité se elige *uno* de los tres hermanos, el cual puede ser presidente, secretario o tesorero; para cada uno de los tres arreglos resultantes, puede ocurrir la misma cantidad de maneras.

Presidente Secretario Tesorero

$$\boxed{\mathbf{3}}\boxed{17}\boxed{16} \Rightarrow 3 \times 17 \times 16 = P_1^3 P_2^{17}$$

$$\boxed{17}\boxed{\mathbf{3}}\boxed{16} \Rightarrow 17 \times 3 \times 16 = P_1^3 P_2^{17}$$

$$\boxed{17}\boxed{16}\boxed{\mathbf{3}} \Rightarrow 17 \times 16 \times 3 = P_1^3 P_2^{17}$$

Finalmente, con la regla de suma, el total de maneras en que pueden ocurrir los diferentes tipos de arreglos es

$$P_3^{17} + P_1^3 P_2^{17} + P_1^3 P_2^{17} + P_1^3 P_2^{17} = 6\ 528 \text{ maneras}$$

Debido a que puede haber problemas para diferenciar los arreglos en los que el orden es importante de los que no, además de los casos en donde se deben emplear las reglas de multiplicación y de suma, se presentan algunos ejemplos en los cuales no se especifica el tema del problema (como en los ejemplos anteriores). Por consiguiente, primero se tendrá que reconocer el tipo de problema y después resolverlo.

Para la solución de un problema, el camino analizado no necesariamente es el único. Se pueden proponer varios métodos de solución, pero siempre considerando las reglas de multiplicación y suma.

Ejemplo 9

1. Un examen de verdadero y falso está formado por catorce preguntas, de las cuales ocho son verdaderas y el resto falsas, ¿cuántos arreglos de catorce respuestas se pueden dar si se contestan todas las preguntas?

El problema se refiere a casos con elementos iguales (ya que si dos o más respuestas son verdaderas no se distingue entre ellas).

Solución

Por la fórmula 1 se tiene que la cantidad de arreglos posibles es

$$P_{8,6}^{14} = \frac{14!}{8!6!} = 3\,003 \text{ maneras de contestar el examen}$$

2. Se quieren formar arreglos de cuatro cifras con los números 0 a 9.

   a) ¿cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar con los números 0 a 9 (si no se permite la repetición) el cero no puede ir al principio y los números formados pueden ser cualesquiera?

   b) los números formados del inciso *a)* deben ser pares

En los dos incisos el orden es importante, ya que al permutar las cifras el número formado cambia, por ejemplo, $19 \neq 91$.

Solución

a) como los números pueden ser cualesquiera,

El cero no puede ir aquí — Pero sí puede ir aquí

9	9	8	7

$\Rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$ números diferentes de cuatro cifras

b) puesto que los números formados deben ser pares, en la última posición sólo puede ir un número par (0, 2, 4, 6 y 8). Asimismo, se tienen dos tipos de arreglos, uno cuando el número en la última posición sea cero y otro cuando no lo sea.

Aquí va el cero

9	8	7	1

$\Rightarrow 9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504$ (el cero está en último lugar)

Aquí no puede ir el cero — Aquí va un número cualquiera de 2, 4, 6 y 8

8	8	7	4

$\Rightarrow 8 \times 8 \times 7 \times 4 = 1\,792$ (el cero no está en el último lugar)

Con el uso de la regla de suma, se tiene $504 + 1\,792 = 2\,296$ números pares de cuatro cifras diferentes que se pueden formar con los números dígitos.

3. Se sabe que un número expresado en sistema binario tiene siete cifras, de las cuales se conoce que tiene tres 1 y las demás son ceros, ¿cuántos números diferentes se pueden formar, si el cero no va al principio?

Como el cero no va al principio, en las otras seis posiciones pueden estar dos unos y cuatro ceros.

Solución Como estos elementos son iguales, se tiene que la cantidad de números diferentes es

$$P^{6}_{2,4} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

4. En una fábrica se distribuyen quince aparatos electrónicos en tres líneas diferentes, con cinco aparatos en cada línea. Si dos de los aparatos son defectuosos, de cuántas maneras se pueden distribuir los aparatos en las cinco líneas si

   a) los dos defectuosos quedan en la línea uno
   b) los dos defectuosos quedan en una misma línea

   En este problema el orden entre los aparatos no importa, sólo interesa que existan cinco en cada línea.

Solución *a)* De los cinco aparatos de la línea uno, dos son defectuosos, por lo que se pueden escoger C^2_2 defectuosos y C^{13}_3 buenos para la línea 1. Para la línea 2 se escogen los cinco de los diez buenos restantes. Finalmente, los cinco de la línea 3 se escogen de los cinco buenos restantes. Esto se representa

$$\boxed{C^2_2 C^{13}_3} \boxed{C^{10}_5} \boxed{C^5_5} \Rightarrow C^2_2 C^{13}_3 \times C^{10}_5 \times C^5_5 = 72\ 072$$

b) Se pide que los dos aparatos defectuosos se localicen en una misma línea, que puede ser cualquiera de las tres existentes, la segunda o la tercera. Cada tipo de arreglo tendrá la misma cantidad de casos, por lo cual es necesario resolver sólo uno. Se retoma la solución del inciso *a)* en la línea 1, y se multiplica la cantidad de casos a ocurrir $C^3_1 = 3$. Basados en esto, se tiene

$$3 \times 72\ 072 = 216\ 216 \text{ maneras de distribuir los 15 aparatos}$$

Es posible comprobar la respuesta resolviendo los tres casos obteniendo el mismo valor.

Línea 1 ↓	Línea 2 ↓	Línea 3 ↓	
$C^2_2 C^{13}_3$	C^{10}_5	C^5_5	$\Rightarrow C^2_2 C^{13}_3 \times C^{10}_5 \times C^5_5 = 72\ 072$ defectuosos en la línea 1
C^{13}_5	$C^2_2 C^8_3$	C^5_5	$\Rightarrow C^{13}_5 \times C^2_2 C^8_3 \times C^5_5 = 1\ 287 \times 56 = 72\ 072$ defectuosos en la línea 2
C^{13}_5	C^8_5	$C^2_2 C^3_3$	$\Rightarrow C^{13}_5 \times C^8_5 \times C^2_2 C^3_3 = 1\ 287 \times 56 = 72\ 072$ defectuosos en la línea 3

Total de arreglos $72\ 072 \times 3 = 216\ 216$.

5. De cuántas maneras pueden sentarse en línea recta siete hombres y cuatro mujeres si

   a) todas las mujeres deben sentarse primero
   b) todas las mujeres deben estar siempre juntas

   En este problema *sí* importa el orden.

Solución

a) En el caso de que las mujeres deben sentarse primero, se pueden sentar de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ maneras; mientras que los hombres se pueden sentar de $7! = 5\,040$ maneras. Con el uso de la regla de multiplicación, se tiene que el total de arreglos, cuando las mujeres se sienten primero, es

$$4! \times 7! = 24 \times 5\,040 = 120\,960$$

b) En el caso de que las mujeres deben sentarse siempre juntas, se tienen diferentes tipos de arreglos; uno cuando estén en primer lugar, otro en segundo, en tercero, etc., hasta el octavo lugar, y todos van a tener la misma cantidad de maneras de acomodarse; se retoma el resultado del inciso *a)* y se tiene que el total de arreglos es

$$120\,960 \times 8 = 967\,680$$

Ejercicio 5

1. Un examen de álgebra lineal está formado por tres temas. El tema *A* contiene seis preguntas, el tema *B* cuatro preguntas y el tema *C* ocho preguntas y se deben contestar cinco preguntas, ¿de cuántas maneras diferentes puede elegir sus preguntas un estudiante, si a lo más debe elegir dos preguntas del tema *C*?
2. En un grupo de 30 personas existen cuatro con el mismo apellido. Si se forma un equipo de tres personas, calcula de cuántas formas diferentes se puede realizar la elección de tal manera que por lo menos una de las personas elegidas coincida con dicho apellido.
3. Cuántos números diferentes de tres cifras se pueden formar con los números 0 a 9, si el cero no va al principio, no se permite la repetición y

   a) los números deben de ser mayores que 450
   b) los números son pares

4. En una tienda hay 30 artículos, de los cuales 20 no tienen defectos y diez sí son defectuosos. Si se seleccionan ocho artículos, calcula de cuántas maneras se puede hacer la elección para que a lo más dos sean defectuosos.
5. Un juego consiste en tomar seis números sin reemplazo de un grupo del 1 al 44, calcula de cuántas formas se puede hacer la elección de tal manera que por lo menos cuatro de los seis sean números pares.

3.6 Aplicación de las técnicas de conteo a la probabilidad

¿A qué tipo de espacios muestrales se aplican las técnicas de conteo para el cálculo de probabilidades?

En esta sección sólo se considerarán espacios muestrales finitos en los que todos sus elementos son *equiprobables*; esto es, los problemas tratados se asemejarán al lanzamiento de una moneda, un dado o algún otro objeto; para los casos de seleccionar un objeto se sobreentenderá que dicha elección se realiza de forma aleatoria.

Considerando sólo espacios muestrales finitos, se simboliza por $\eta(S) \neq 0$ la *cantidad de elementos del espacio muestral* y por $\eta(E)$ a la *cantidad de elementos de algún evento E*. Considerando que los elementos del espacio muestral son *equiprobables*, la probabilidad de uno (cualesquiera de ellos) es $1/\eta(S)$ y, de acuerdo a la corriente clásica de probabilidad, se tiene que la probabilidad del evento es

$$P(E) = \eta(E) \times \frac{1}{\eta(S)} = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} \qquad \eta(S) \neq 0 \text{ y } E \subset S$$

Cabe mencionar que esta probabilidad cumple con los tres axiomas de probabilidad de Kolmogorov.

En los siguientes ejemplos se muestra el procedimiento de solución

1. Se define el experimento del que se habla en el problema.
2. Se encuentra el espacio muestral del experimento.
3. Se define y encuentra al evento correspondiente.

Finalmente, se calcula la probabilidad.

Ejemplo 10

1. Una urna contiene trece esferas numeradas del uno al trece, de las cuales tres son rojas, cuatro blancas y seis azules. Si se toman dos esferas, calcula la probabilidad de que una y sólo una de ellas sea roja. Esto nos lleva a tres opciones de resolución.

Solución

a) Tomar las esferas al azar (sin reemplazo).

El experimento consiste en "tomar dos esferas de un total de trece". Por tanto, el espacio muestral S tiene $\eta(S) = 13 \times 12 = 156$ elementos.

El evento E se define como: "el resultado del experimento en donde una y sólo una esfera es roja".

Esto puede ocurrir de dos maneras:

1. Cuando la primera esfera extraída es roja y la segunda no lo es ($3 \times 10 = 30$ opciones).
2. Cuando la primera no es roja y la segunda sí lo es ($10 \times 3 = 30$ opciones).

Por tanto, $\eta(E) = 30 + 30 = 60$

La probabilidad es

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} = \frac{60}{156} = 0.3846$$

b) Tomando las dos esferas a la vez.

El experimento consiste en "tomar dos esferas a la vez de un total de trece". Por tanto, el espacio muestral S tiene $\eta(S) = C_2^{13} = 78$ elementos.

El evento E se define como: "el resultado del experimento en donde una esfera y sólo una es roja". Lo anterior ocurre $\eta(E) = C_1^3 \times C_1^{10} = 30$ maneras, y la probabilidad es:

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} = \frac{30}{78} = 0.3846$$

c) Con reemplazo.

El experimento consiste en: "tomar dos esferas de un total de trece una tras otra con reemplazo". Por tanto, el espacio muestral S tiene $\eta(S) = 13 \times 13 = 169$ elementos.

El evento E se define como: "el resultado del experimento en donde una y sólo una esfera es roja".

Esto puede ocurrir de dos maneras:

1. Cuando la primer bola extraída es roja y la segunda no lo es ($3 \times 10 = 30$ opciones)
2. Cuando la primera no es roja y la segunda sí ($10 \times 3 = 30$ opciones).

Por tanto, $\eta(E) = 30 + 30 = 60$.

La probabilidad es

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} = \frac{60}{169} = 0.3550$$

2. Si se sientan en línea recta siete hombres y cuatro mujeres aleatoriamente, se calcula la probabilidad de que

a) todas las mujeres se sienten en los primeros cuatro lugares
b) todas las mujeres se sienten siempre en lugares contiguos

En este problema sí importa el orden. El experimento, en general, se define como: "manera en que pueden sentarse once personas en línea recta". Por tanto, el espacio muestral S tendrá $\eta(S) = 11!$ puntos muestrales.

Solución

a) el evento E se define como: "las mujeres sentadas en los primeros cuatro lugares".

Las mujeres pueden sentarse de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ maneras diferentes, mientras que los hombres de $7! = 5\,040$ maneras. Con el uso de la regla de multiplicación se tiene el total de arreglos cuando las mujeres se sienten en los primeros lugares

$$\eta(E) = 4!7! = 24 \times 5\,040 = 120\,960$$

La probabilidad es

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} = \frac{4!7!}{11!} = \frac{120\,960}{39\,916\,800} = 0.0030$$

b) el evento E se define como: "las mujeres sentadas juntas".

Se tienen diferentes opciones de arreglos, uno cuando las mujeres estén en primer lugar, otro en segundo, en tercero, etc., hasta el octavo lugar, teniendo la misma cantidad de maneras de acomodarlas; por tanto, empleando el resultado del inciso *a)* se tiene que el total de arreglos cuando las mujeres van siempre juntas esta dado por

$$\eta(E) = 4!7! \times 8 = 967\,680$$

La probabilidad es

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} = \frac{4!7! \times 8}{11!} = \frac{967\,680}{39\,916\,800} = 0.0242$$

3. Nueve personas saldrán de viaje en tres carros, con capacidad de dos, cuatro y cinco pasajeros, respectivamente. Si las nueve personas se reparten en todos lo carros, ¿cuál es la probabilidad de que los dos lugares vacíos queden en el carro con capacidad para cinco personas?

   En el problema no importa el orden. El problema es: "la manera como se reparten las nueve personas en tres carros".

Solución Se tienen once lugares y sólo nueve personas, además se deben emplear los tres carros, por lo que siempre dos lugares estarán vacíos, se tienen varios tipos de arreglos:

C_1^9	C_3^8	C_5^5	$\Rightarrow$ 504 un lugar vacío en el primero y segundo carros
C_1^9	C_4^8	C_4^4	$\Rightarrow$ 630 un lugar vacío en el primer y tercer carros
C_2^9	C_3^7	C_4^4	$\Rightarrow$ 1 260 un lugar vacío en el segundo y tercer carros
C_2^9	C_2^7	C_5^5	$\Rightarrow$ 756 dos lugares vacíos en el segundo carro
C_2^9	C_4^7	C_3^3	$\Rightarrow$ 1 260 dos lugares vacíos en el tercer carro

En total, por la regla de suma, $\eta(S) = 504 + 630 + 1260 + 756 + 1260 = 4\,410$

El evento E se define como: "los dos lugares vacíos quedan en el carro con capacidad para cinco personas".

De los resultados anteriores es posible observar que el evento coincide con el último caso del espacio muestral, por tanto, $\eta(E) = 1\,260$.

La probabilidad es

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} = \frac{1\,260}{4\,410} = 0.2857$$

4. Se lanza un dado dos veces y se calcula la probabilidad de que se obtenga un seis en el segundo lanzamiento.

   El experimento consiste en: "lanzar un dado dos veces". Por tanto, el espacio muestral S tiene $\eta(S) = 6 \times 6 = 36$ resultados posibles. El evento E se define como: "el segundo lanzamiento del dado resulte el primer seis".

Solución Como el primer lanzamiento no debe ser seis, se tienen cinco posibles resultados, mientras que el segundo lanzamiento debe ser seis, por tanto, sólo hay una opción: $\eta(E) = 5 \times 1 = 5$.

La probabilidad es

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} = \frac{5}{36} = 0.1389$$

Ejercicio 6

1. En una tienda se tienen cien artículos de los cuales 90 son buenos y diez defectuosos. Calcula la probabilidad de que en los siguientes diez artículos que se vendan se encuentre

   a) uno y sólo uno defectuoso
   b) ninguno defectuoso

2. Una urna contiene 20 canicas iguales en forma y tamaño, numeradas del uno al 20, de las cuales ocho son verdes, seis azules, cuatro rojas y dos blancas. Si se toman tres canicas de la urna sin reemplazo (al azar), calcula

   a) la probabilidad de que las tres canicas sean verdes
   b) la probabilidad de que al menos una sea verde

3. Calcula la probabilidad de que el día de cumpleaños de doce personas se presente en diferentes meses del año.
4. Se escriben en forma aleatoria tres números entre 0 y 9. Calcula la probabilidad de que

   a) los tres sean iguales
   b) entre los tres se encuentren dos iguales

5. Para la solución de cierto problema se empleará un algoritmo, en el cual habrá ocho multiplicaciones y cuatro sumas, calcula la probabilidad de que las ocho multiplicaciones se efectúen siempre una tras otra sin que exista una suma en medio de dos multiplicaciones.
6. En un centro comercial quedan diez carros de control remoto para la venta, entre los cuales existen cuatro defectuosos. Si un cliente entra a la tienda para comprar dos de esos carros, calcula la probabilidad de que uno de los carros elegidos sea defectuoso.
7. Considera todas las letras de la palabra *probabilidad*, calcula la probabilidad de que las vocales iguales siempre vayan juntas.

Ejercicios propuestos

1. Cuatro parejas (cuatro hombres y cuatro mujeres) van a ir al teatro, compraron boletos para ocho asientos en la misma fila, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden colocar las ocho personas si dos mujeres determinadas deben sentarse juntas?
2. Calcula cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar con los números 0 a 9, si el cero no va al principio, no se permite el reemplazo y

   a) los números deben ser impares
   b) los números deben ser impares menores a cuatro mil

3. Se sabe que un número en el sistema binario tiene trece cifras, de las cuales se tienen seis unos. Cuántos números diferentes se pueden formar, si el cero no va al principio, y el número en el sistema decimal es

   a) impar
   b) par

4. Calcula cuántos arreglos diferentes pueden formarse con las letras de la palabra *Cuitláhuac*, si se consideran sólo cuatro letras diferentes al mismo tiempo.
5. Un experimento consiste en lanzar dos dados.

   a) utiliza los teoremas combinatorios para determinar el número de puntos muestrales
   b) asigna probabilidades a los puntos muestrales y calcula la probabilidad de que la suma de los números que aparecen en los dados sea igual a siete

6. Un tetraedro regular tiene anotados los números 1, 2, 3 y 4 en sus caras. Se lanza y el número que queda abajo se anota. Si el tetraedro se lanza tres veces, calcula todas las combinaciones posibles obtenidas de los tres lanzamientos y la probabilidad de que la suma de los tres lados resultantes sea mayor a nueve.
7. En un examen de física experimental, el profesor elabora 60 preguntas diferentes. El día del examen las coloca en una urna y el alumno deberá tomar al azar tres preguntas sin reemplazo. Si el primer estudiante que va a elegir sólo se preparó para 50 de las preguntas, de las otras diez no sabe absolutamente nada. El estudiante aprobará el examen si contesta bien al menos dos de las tres preguntas, calcula la probabilidad de que en dichas condiciones el estudiante apruebe el examen.
8. Se lanzan seis dados, calcula la probabilidad de que al caer los dados todas las caras sean iguales o todas diferentes.
9. En un componente electrónico existen 20 placas de tres tipos diferentes, ocho del tipo I, cinco del tipo II y siete del tipo III. Se seleccionan al azar cinco placas para inspeccionarlas, calcula la probabilidad de

   a) que las cinco placas sean del mismo tipo
   b) que dos sean del tipo I, una del tipo II y dos del tipo III

10. Un productor tiene almacenados nueve motores diferentes, dos de los cuales fueron suministrados por un proveedor en particular. Se deben distribuir los motores en tres líneas de producción, con tres motores en cada línea. Si la asignación de los motores es aleatoria, calcula la probabilidad de que los dos motores del proveedor queden en una misma línea.
11. Para participar en un juego se eligen seis números sin repetición de un total de 44. La persona que tenga los mismos números resultantes en el sorteo gana el juego, calcula

   a) la probabilidad de que ningún número elegido por la persona coincida con los seis números resultantes del sorteo
   b) la probabilidad de que *al menos cuatro* de los seis números elegidos por la persona coincida con los seis números resultantes del sorteo

12. Se sabe que un número binario tiene siete cifras, de las cuales tres son 1. Si estos números se colocan en diferentes recipientes, se sortean y se extrae uno de ellos, calcula la probabilidad de que el número extraído al cambiarse a base decimal sea mayor a 96, si el cero no va al principio.

Autoevaluación

1. Se lanzan dos dados. Utiliza los teoremas combinatorios para determinar el número de puntos muestrales y asígnales probabilidades a cada uno, calcula la probabilidad de que la suma de los puntos que aparecen en los dados sea igual a cuatro.

a) $\frac{5}{36}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{36}$

d) $\frac{1}{12}$

2. Cuatro personas juegan dominó, se reparten 28 fichas, siete para cada uno, calcula la probabilidad de que a una persona le toquen cuatro *mulas*.

a) 0.0393
b) 0.1204
c) 0.2430
d) 0.0001

3. En un centro comercial quedan diez carros de control remoto para la venta, entre los cuales existen cuatro defectuosos. Si una persona compra dos carros, calcula la probabilidad de que por lo menos uno de los carros elegidos sea defectuoso.

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{15}$

d) $\frac{8}{15}$

4. Una tienda tiene 40 refrigeradores, de los cuales cinco son defectuosos, calcula la probabilidad de que en los siguientes cuatro pedidos se entreguen dos defectuosos.

a) 0.0229
b) 0.0651
c) 0.4
d) 0.04

5. Un número binario tiene diez cifras, de las cuales seis son 1, calcula cuántos números diferentes se pueden formar, si se sabe que el cero no va al principio y el número en el sistema decimal es impar.

a) 40 320
b) 576
c) 70
d) 24

6. En un componente electrónico existen 20 placas de tres tipos diferentes, ocho son del tipo I, cinco del tipo II y siete del tipo III. Si se seleccionan al azar cuatro placas para inspeccionarlas; calcula la probabilidad de que al menos tres sean del tipo II.

a) 0.0677
b) 0.03199
c) 0.6
d) 0.06

7. Para participar en un juego se consideran seis números al azar de un total de 44. La persona que tenga los mismos números resultantes en el sorteo gana el juego, calcula la probabilidad de que tres de los seis números considerados por una persona coincidan con los seis números resultantes del sorteo.

a) 0.010
b) 0.0001
c) 0.0239
d) 0.05

8. Si se tiene un conjunto finito con n elementos diferentes y se forman combinaciones de k elementos cada una, indica cuál de los siguientes incisos se asocia a las combinaciones.

a) el orden entre los k elementos elegidos es fundamental
b) la cantidad de subconjuntos de k elementos, cada uno, elegidos de un conjunto infinito que contiene elementos diferentes
c) la cantidad de arreglos diferentes que contienen a lo más k elementos elegidos sin importar el orden de un conjunto finito que contiene n elementos
d) cantidad de subconjuntos no ordenados que constan de k elementos tomados de un total de n

9. Un alumno se ha preparado en 25 temas de un total de 35 para un examen, en el cual se les entregará una ficha con cinco temas al azar de un total de 35. Si el alumno debe contestar correctamente por lo menos tres temas de los cinco para aprobar, calcula la probabilidad de que apruebe el examen.

a) 0.8722
b) 0.20
c) 0.5
d) 0.3188

10. Cuando se resuelven problemas de probabilidad aplicando técnicas de conteo por medio de espacios muestrales finitos, donde cada uno de sus elementos es equiprobable, para la asignación de probabilidades a los eventos se puede aplicar la corriente de probabilidad

a) frecuentista
b) subjetiva
c) clásica
d) bayesiana

Respuestas de los ejercicios

Ejercicio 1

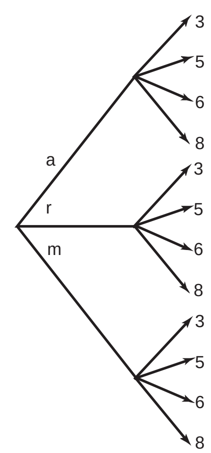
1. 12

2. 9

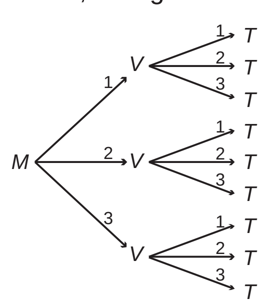
3. 1 800

Ejercicio 2

1. doce, el diagrama de árbol es



2. nueve, el diagrama de árbol es



Ejercicio 3

1.
- *a)* 665 280
- *b)* 15 120

2. 204 756

3. 8

4.
- *a)* 8!11!
- *b)* 3!(6!4!8!)

5. 453 600

6. 5 082 517 440

7.
- *a)* 384
- *b)* 30 240

Ejercicio 4

1.
- *a)* 924
- *b)* 126

2.
- *a)* 101 025
- *b)* 60 378

3.
- *a)* 20
- *b)* 0

4. 7 059 052

5.
- *a)* 8!
- *b)* $8!C_4^8$

6. 4 480

Ejercicio 5

1. 5 292

2. 1 460

3.
a) 399
b) 328

4. 2 645 370

5. 2 343 726

Ejercicio 6

1.
a) 0.408
b) 0.3305

2.
a) 0.049
b) 0.8070

3. 0.000054

4.
a) 0.01
b) 0.27

5. $\frac{1}{99}$

6. $\frac{8}{15}$

7. $\frac{1}{33}$

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 7! 2!

2.
a) 2 240
b) 728

3.
a) 330
b) 462

4. 840

5.
   a) 36
   b) $\frac{1}{6}$

6. $\frac{5}{32}$

7. 0.9307

8. 0.0156

9.
   a) 0.005
   b) 0.1896

10. 0.25

11.
   a) 0.3911
   b) 0.0015

12. $\frac{1}{3}$

Respuestas de la autoevaluación

1. *d)*

2. *a)*

3. *a)*

4. *b)*

5. *c)*

6. *b)*

7. *c)*

8. *d)*

9. *a)*

10. *c)*