Gerolamo Cardano
1501-1576

Matemático y médico italiano. Fue un aficionado a los juegos de azar, y aunque estos le trajeron ciertos problemas, gracias a su experiencia con ellos, escribió uno de los primeros libros de probabilidad, el *Liber de ludo aleae* el cual ofreció la primera aproximación sistemática a la teoría de la probabilidad.

Probabilidad

La **probabilidad** es la rama de la matemática que estudia experimentos cuyos resultados no se pueden determinar con certeza. Este tipo de experimentos se conoce con el nombre de **aleatorios**.

Para definir probabilidad es necesario recurrir a tres definiciones previas: **experimento aleatorio**, **espacio muestral** y **evento**.

Un **experimento aleatorio** es aquel en el cual se conoce el procedimiento que se va a seguir y los posibles resultados, pero no se puede predecir con certeza cuál de esos resultados será el final antes de realizar el experimento. Cuando se tiene la seguridad del resultado se habla de un **experimento determinístico**.

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los posibles resultados que puede tener un experimento aleatorio. Se simboliza con la letra S.

A cada resultado del espacio muestral se le denomina **punto muestral** y cada uno de ellos debe tener la misma posibilidad de ocurrir. Por ejemplo, al lanzar una moneda el espacio muestral $S = \{\text{cara, sello}\}$ en donde un punto muestral es cara y otro punto muestral es sello.

Si se lanzan tres monedas al tiempo el espacio muestral es: $S = \{\text{CCC, CCS, CSC, CSS, SSS, SSC, SCS, SCC}\}$ uno de los puntos muestrales es CSC, en donde S representa el sello y C la cara. Además, CSC significa que en la primera moneda se obtuvo cara, en la segunda sello y en la tercera cara.

Evento

Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral, cuyos elementos tienen una característica en común. Se simboliza con letras mayúsculas.

De acuerdo con la cantidad de puntos muestrales los eventos se pueden clasificar en eventos simples, compuestos, imposibles, seguros, mutuamente excluyentes.

Evento simple o elemental: es aquel que contiene un solo punto muestral.

Evento compuesto: es evento con más de un punto muestral.

Evento imposible: es aquel que no contiene ningún punto muestral.

Evento seguro: es aquel que contiene los mismos puntos del espacio muestral S.

Eventos mutuamente excluyentes: dos eventos son mutuamente excluyentes si no tienen resultados en común, es decir, su intersección es vacía.

A partir del espacio muestral del lanzamiento de tres monedas distintas al aire se tiene:

Evento $A = \{x/x \text{ tiene únicamente caras}\} = \{\text{CCC}\}$ es un evento simple.

Evento $B = \{x/x \text{ tiene como mínimo dos sellos}\} = \{\text{CSS, SSS, SSC, SCS}\}$ tiene cuatro puntos muestrales, por tanto, es un evento compuesto.

Evento $C = \{x/x \text{ tiene cuatro sellos}\} = \{\ \}$ es un evento imposible porque solo se lanza tres monedas, luego el mayor número de sellos es tres, no cuatro.

Evento $D = \{x/x \text{ tiene una cara o un sello}\} = \{\text{CCC, CCS, CSC, CSS, SSS, SSC, SCS, SCC}\} = S$. Es un evento seguro.

Por ejemplo, el evento $E = \{x/x \text{ únicamente tiene sellos}\} = \{\text{SSS}\}$ es excluyente con el evento $F = \{x/x \text{ tiene por lo menos una cara}\} = \{\text{CCC, CCS, CSC, CSS, SSC, SCS, SCC}\}$ porque $E \cap F = \{\ \}$.

Ejemplos

Una cooperativa requiere, para conformar su junta directiva, elegir un presidente y un secretario. Los candidatos son: Jorge (*J*), Alberto (*A*) y Sara (*S*).

a. Determinar el espacio muestral.

El espacio muestral en este experimento es $S = \{JA, JS, AS, AJ, SJ, SA\}$. En cada punto muestral la primera posición indica el presidente y la segunda el secretario.

b. Determinar algunos eventos y clasificarlos.

Algunos **eventos** de este experimento son:

- Evento M, que sean elegidas solo mujeres $M = \{\ \}$, es decir, es un **evento imposible** porque solo hay una mujer y se va a seleccionar dos personas.
- Evento N, que sean seleccionados un hombre y una mujer, $N = \{JA, AJ\}$, es un **evento compuesto**, ya que tiene más de un punto muestral.
- Evento P, que se elija un hombre $P = \{JA, JS, AS, AJ, SJ, SA\}$, es un **evento seguro** porque $P = S$.
- Evento R, que Sara sea secretaria y Jorge presidente $R = \{JS\}$, es un **evento simple** porque solo hay un punto del espacio muestral.
- Evento Q, que Alberto sea elegido $Q = \{JA, AS, AJ, SA\}$.

Nótese que el evento M es **mutuamente excluyente** con cada uno de los otros cuatro eventos pues su intersección siempre es vacía.

Actividades

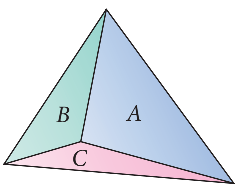
Interpreta: 1 Razona: 2

1 Determina si los siguientes experimentos son aleatorios o determinísticos.

a. Sacar una carta en una baraja de póquer.
b. Lanzar un balón de baloncesto al aire.
c. Encontrar el perímetro de un cuadrado de lado 2.
d. Seleccionar tres estudiantes de noveno para un baile.

2 Establece cuál es el espacio muestral de los siguientes experimentos.

a. Lanzar un dado y dos monedas distintas al tiempo.
b. Extraer tres balotas de una urna que contiene una balota azul, una roja, una verde y una amarilla.
c. Lanzar dos dados distintos a la vez.
d. Lanzar dos veces un tetraedro cuyas caras tienen las letras *A*, *B*, *C* y *D*.



Soluciona problemas

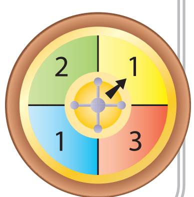
3 En cada uno de los siguientes experimentos establece el espacio muestral. Luego, escribe dentro de un conjunto los puntos muestrales de cada evento, y clasifícalo como evento simple, compuesto, seguro o imposible.

a. Un profesor debe seleccionar a tres estudiantes entre Julián, María, Vicente y Nidia, para un concurso de ortografía.

Eventos:
E: que sean seleccionadas solo mujeres.
F: que sean seleccionados dos mujeres y un hombre.
G: que en el grupo seleccionado esté un hombre.
H: que Vicente no sea seleccionado.

b. Girar dos veces una ruleta como la siguiente:

Eventos:
N: formar un múltiplo de 3.
O: formar un número que sea mayor que 10.
P: obtener un número divisible entre 4.



Técnicas de conteo

Existen diferentes **técnicas de conteo** que ayudan a establecer el número de puntos muestrales en un experimento. Dentro de las más conocidas están: el **principio de multiplicación**, la **permutación** y la **combinación**. Estas técnicas se ven influenciadas por dos aspectos: el orden y la repetición.

En un experimento aleatorio se considera que existe el **orden** cuando al conformar los puntos muestrales, el orden en que se ubiquen los elementos de la población hace que los resultados sean diferentes.

En un experimento aleatorio se considera que existe la **repetición** cuando un elemento de la población se puede repetir en los puntos muestrales.

Por ejemplo, al formar números de dos cifras con los dígitos 1, 2 y 3 el espacio muestral es $S = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$.

En este caso, el orden importa, ya que el número 12 no es igual al número 21 debido al sistema posicional de las cifras. Por otra parte, hay puntos muestrales que tienen elementos repetidos. Por ejemplo, los puntos 11, 22 y 33 repiten el mismo dígito en las unidades y en las decenas.

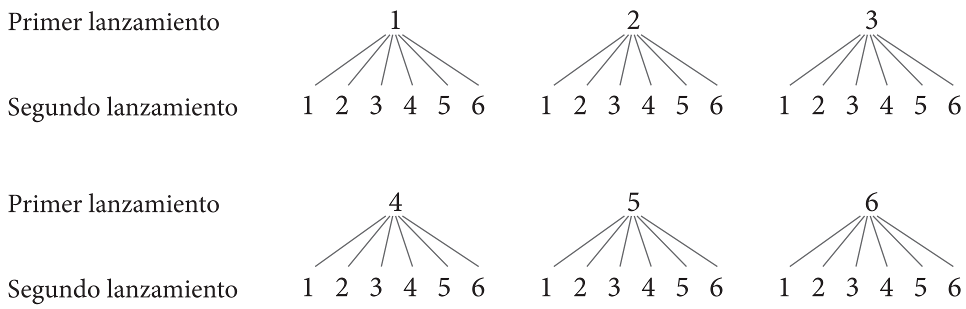
Principio de multiplicación

Esta técnica de conteo permite encontrar el número de elementos del espacio muestral en aquellos experimentos aleatorios en los cuales existe el orden y la repetición.

Dado un experimento aleatorio con una población de N elementos y una muestra de n elementos, el número de formas distintas de resultar el experimento es N^n.

Por ejemplo, se lanza un dado dos veces, el número de resultados posibles en el espacio muestral es $\#S = N^n = 6^2 = 36$ porque en cada lanzamiento hay 6 posibles respuestas (1, 2, 3, 4, 5 y 6) y son 2 lanzamientos.

En este caso, para determinar cuáles son los 36 puntos muestrales, se puede utilizar un **diagrama de árbol**, en el cual se escriben en forma ramificada los elementos de cada lanzamiento, como se muestra a continuación:



Se puede observar que cada camino corresponde a un punto muestral, es decir, el primer camino (1, 1) es el primer punto muestral. Los demás puntos muestrales son:

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

El **principio de multiplicación** también se aplica para aquellos casos en los cuales se debe obtener una muestra considerando poblaciones diferentes. En este caso, si se tienen $N_1, N_2, \ldots, N_r$, poblaciones distintas y se debe tomar una muestra con elementos de cada una de ellas, el número de elementos del espacio muestral es:

$$\#S = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_r$$

Por ejemplo, Antonio lleva para un viaje 4 pantalones, 5 camisas y 3 pares de zapatos. Para calcular las posibles formas distintas en que se puede vestir Antonio, se procede así:

Como se habla de diferentes artículos para combinar se hace referencia al principio de multiplicación, $\#S = 4 \times 5 \times 3 = 60$.

Por tanto, Antonio se puede vestir de 60 maneras diferentes en el viaje.

RECUERDA QUE...

En la calculadora las teclas ${}_nP_r$ y ${}_nC_r$ hallan permutaciones y combinaciones, respectivamente.

Por ejemplo, al digitar $5\,{}_nC_r\,2$ se calcula la combinación de 5 elementos tomados de a 2.

Permutación

Una **permutación** es una operación que se define para dos números naturales de tal forma que "la permutación de n en N" se simboliza ${}_nP_N$ y se calcula:

$${}_NP_n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Donde $N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ y además $0! = 1$.

La permutación se utiliza cuando se quiere calcular el número de elementos del espacio muestral de un experimento aleatorio, en el cual se considera que existe el orden en la muestra pero, no es posible repetir ningún elemento de la población en su conformación.

En el experimento aleatorio en el cual se consideren estos dos elementos es necesario que la población sea mayor que la muestra.

Combinaciones

Una **combinatoria** es una operación que se define para dos números naturales de tal forma que la *combinación de n* en N, notada $\binom{N}{n}$, se calcula:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)! \times n!}$$

La combinatoria se utiliza cuando se quiere calcular el número de elementos del espacio muestral de un experimento aleatorio, en el cual no se considera que existe el orden en la muestra y no es posible repetir ningún elemento de la población en su conformación.

De la misma forma que para las permutaciones, es necesario que la población sea mayor que la muestra.

Ejemplos

1. **Se seleccionan cuatro estudiantes de artes: Mario (M), Paola (P), Luis (L) y Rocío (R) para otorgar tres becas en el exterior. Una beca por persona. ¿Cuántos grupos distintos es posible formar para seleccionar los tres estudiantes? Escribir todos los puntos muestrales.**

En esta situación no hay orden ni repetición porque al escoger un grupo, la posición donde aparezca cada estudiante no tiene importancia ya que las becas se asignarán a tres estudiantes sin distinción alguna, es decir, el grupo MPL contiene las mismas personas que el grupo LPM. Además, una persona no puede acceder a dos o más becas. Por tanto, para determinar la cantidad de grupos que se puede formar se utiliza una combinación en donde $N = 4$ y $n = 3$.

$$_N C_n = {}_4 C_3 = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4!}{(1)! \cdot 3!} = \frac{3! \cdot 4}{1 \cdot 3!} = 4$$

Los cuatro grupos distintos son MPL, MPR; MLR, PLR.

2. **En una actividad recreativa se requiere acomodar, en una hilera de 11 sillas, a 6 hombres y 5 mujeres, de tal manera que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿Cuántas formas distintas hay para acomodar a las once personas?**

Para solucionar esta situación se utiliza el principio de multiplicación, ya que después de sentar a un hombre hay que sentar a una mujer y después de sentar a una mujer hay que sentar a un hombre, y así sucesivamente. Entonces, el número total de formas diferentes de sentarlos está dado por:

$\#S = 6 \times 5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 86.400$

Por tanto, el número total de formas de sentarlos es 86.400.

3. **Una empresa realiza una fiesta de fin de año y va a donar un televisor, una nevera y una grabadora entre sus 80 trabajadores. ¿De cuántas maneras distintas pueden repartirse los tres electrodomésticos si solo se dará un premio por persona?**

En esta situación importa el orden pero no hay repetición porque cada posición del trabajador indica un electrodoméstico; además una persona no puede obtener más de un electrodoméstico. Por tanto, para calcular el número de posibilidades se utiliza una permutación $N = 80$ y $n = 3$, así:

$$\begin{aligned} _N P_n = {}_{80} P_3 &= \frac{80!}{(80-3)!} \\ &= \frac{80!}{77!} \\ &= \frac{77! \cdot 78 \cdot 79 \cdot 80}{77!} = 492.960 \end{aligned}$$

Por tanto, hay 492.960 maneras de repartir los tres electrodomésticos entre los 80 trabajadores.

4 **A las semifinales de un campeonato de fútbol clasifican 8 equipos. Si para definir los cuatro equipos que pasarán a la final cada uno se enfrenta con los otros 7 solo una vez, ¿cuántas formas hay para organizar los partidos en la semifinal?**

En este caso no importa el orden en el que se nombren los equipos para un partido y no se tiene lugar a que en un partido un equipo se repita, por tanto, para determinar el número de formas se utiliza una combinación con $N = 8$ y $n = 2$, así:

$$ {}_8C_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!}$$

$$= \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

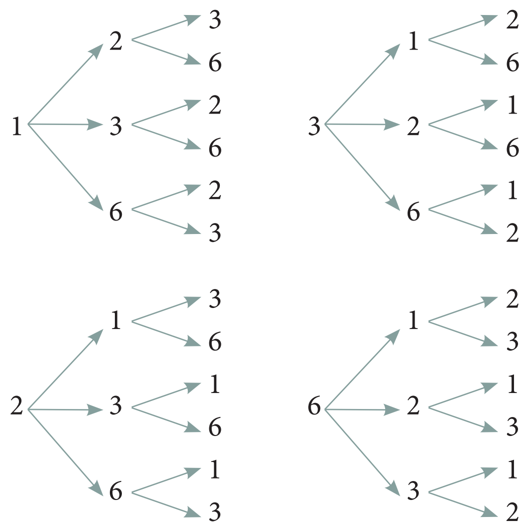
Por tanto, es posible organizar los partidos de 28 formas diferentes, de tal modo que cada uno juegue con los otros solamente una vez.

5 **Establecer cuántos y cuáles números de tres cifras se pueden formar con los divisores del número 6. No se puede repetir divisores.**

El número 6 tiene 4 divisores que son 1, 2, 3 y 6. Como no se puede repetir divisor y se están formando números de tres cifras, se establece la siguiente permutación, con $N = 4$ y $n = 3$.

$$ {}_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

Se pueden formar 24 números distintos, los cuales se muestran en el siguiente diagrama de árbol.

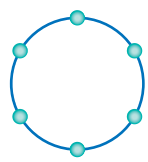


6 **En una reunión se sientan 7 personas alrededor de una mesa. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar?**

En una permutación circular no existe ni primer ni último elemento, por esta razón se disminuye en 1. En este caso, se ubica una persona en el punto de referencia y se permuta a las 6 personas restantes: como se muestra en la figura.

$$\begin{aligned}(n-1)! &= (7-1)!\\ &= 6!\\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\\ &= 720\end{aligned}$$

Punto de referencia



Por tanto, se pueden ubicar de 720 maneras diferentes.

Actividades

Interpreta: 1 Ejercita: 2 Razona: 3-4

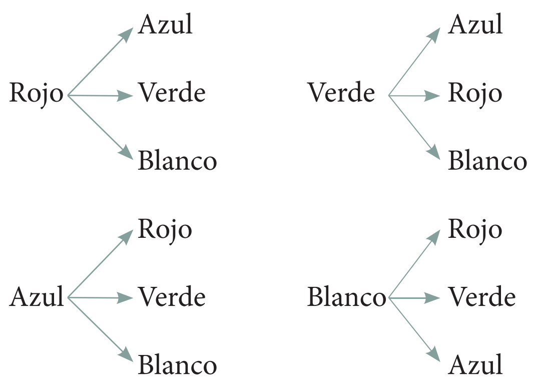
1 Determina si en los siguientes experimentos hay orden y repetición.

a. De 20 perros seleccionar 5 para una exposición canina.
b. Establecer los tres primeros puestos en una competencia.
c. Encontrar el número de placas de motos con dos letras y tres dígitos.
d. Lanzar una moneda cinco veces al aire.
e. Seleccionar dos personas de un grupo familiar para un crucero.
f. Sacar dos balotas numeradas de una bolsa y formar números; no se puede devolver la balota a la bolsa.

2 Camila tiene para desayunar las siguientes opciones: bebidas calientes: café y chocolate; carbohidratos: pan, arepa y galletas; frutas: papaya y melón.

a. Determina cuántas opciones de desayuno puede formar Camila si cada uno tiene que incluir una bebida caliente, un carbohidrato y una fruta.
b. Escribe los posibles menús para el desayuno en un diagrama de árbol.

3 Observa el siguiente diagrama de árbol:



a. Escribe una situación que pueda modelarse con el diagrama de árbol.
b. Realiza un listado de los puntos muestrales que hay en el diagrama de árbol.

4 Responde: ¿Cuántos números de telefonía celular con 10 dígitos es posible formar si se pueden usar todos los dígitos pero deben comenzar con el número 3?

5 Explica cuántos resultados se obtienen al lanzar un dado al aire cuatro veces consecutivas.

6 Manuela elabora las boletas para una rifa con cuatro dígitos. ¿Cuántas boletas puede hacer?

Soluciona problemas

7 Raúl, Adriana, Pedro y Juan son cuatro amigos que asisten al teatro y se sientan en la misma fila donde hay exactamente cuatro sillas.

a. Representa en un diagrama de árbol todas las posibilidades que tienen para sentarse estas cuatro personas.
b. Determina mediante alguna fórmula la cantidad de formas que tienen para sentarse los cuatro amigos.

8 Se tienen cinco tarjetas marcadas con las letras M, A, N, U, E, L y se quiere formar expresiones con o sin sentido con cuatro tarjetas. Cada tarjeta solo se puede usar una vez. Responde:

a. ¿Cuántas expresiones diferentes se pueden formar?
b. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar?
c. ¿Cuántas palabras diferentes que empiecen con la letra M se pueden formar?
d. ¿Cuántas palabras diferentes que empiecen con la letra L se pueden formar?

9 Determina la cantidad de códigos de barras que se pueden elaborar, sabiendo que cada uno de ellos debe llevar trece dígitos.

10 Juliana, Rosa y Martha van a disputar la final de un campeonato de patinaje artístico en la que se entregarán tres medallas: oro, plata y bronce.

a. Determina la cantidad de formas posibles en que se pueden otorgar las medallas.
b. Representa todas las maneras de otorgar las medallas por medio de un diagrama de árbol.

11 Determina cuántas señales distintas es posible realizar con cuatro banderas en fila si se tienen seis banderas diferentes.

Cálculo de probabilidades

En cualquier experimento aleatorio no existe la certeza sobre la ocurrencia de algún evento específico. Una forma de medir la *probabilidad* de que un evento suceda es asignar un número real entre 0 y 1.

Si se está seguro de la ocurrencia de un evento, se afirma que su probabilidad es 1 (o el 100%), pero al contrario, si el evento no tiene posibilidad de que ocurra, entonces su probabilidad es cero.

La **probabilidad** de un evento se obtiene al comparar el número de elementos del evento con el número de elementos del espacio muestral.

Dado un experimento aleatorio, la **probabilidad** de que ocurra un evento E, $P(E)$, es:

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)}$$

Donde, $\#(E)$ es el de elementos del evento E y $\#(S)$ es el número de elementos del espacio muestral.

La probabilidad de ocurrencia de un evento se puede considerar como una medida de incertidumbre. A mayor probabilidad de ocurrencia se tiene mayor confianza en el posible resultado.

Por ejemplo, para calcular la probabilidad de obtener un número primo en el lanzamiento de un dado, se sigue:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y el evento $E = \{2, 3, 5\}$, luego, $\#S = 6$ y $\#E = 3$, con lo cual la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado es:

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Es decir, hay un 50% de posibilidad de obtener un número primo al lanzar un dado.

Las técnicas de conteo se usan para establecer el número de elementos del espacio muestral en un experimento y en un evento, por tanto, es posible calcular la probabilidad en situaciones que involucran dichas técnicas.

Por ejemplo, en el país las placas de las motos tienen 3 letras y 2 dígitos. Se quiere determinar la probabibilidad de que una placa inicie con una vocal.

Para poder encontrar la probabilidad primero se tiene que encontrar el número de elementos del espacio S y el número de elementos de este evento.

Como se pueden repetir letras y dígitos, se utiliza el principio de multiplicación. Se tiene que:

Como hay 26 letras y 10 dígitos, entonces la cantidad de elementos del espacio muestral está dado por:

$$\#S = 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 1.757.600$$

Sea E el evento "placa inicia con una vocal". Como las vocales son 5, se tiene que,

$$\#E = 5 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 338.000 \text{ placas.}$$

Luego, la probabilidad de que la placa inicie con vocal es:

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{338.000}{1.757.600} = 0{,}192$$

Por tanto, la probabilidad de que una placa inicie con una vocal es 19,2%.

Probabilidad y tablas de contingencia

Cuando se trabaja con tablas de contingencia es posible determinar la probabilidad de un evento teniendo como base la frecuencia relativa *fr*.

Para analizar el cálculo de probabilidades se estudiará la siguiente tabla de contingencia, en la cual se registra la cantidad de estudiantes de dos colegios de Cali que aprobaron un examen en ciencias y matemáticas.

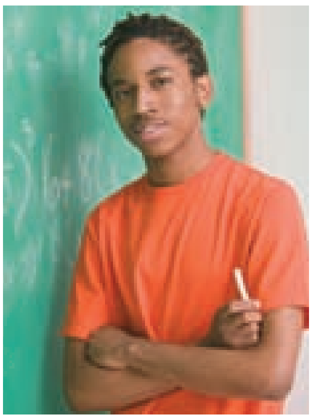
Materia \ Colegio	Colegio A	Colegio B	Total
Ciencias	35	45	80
Matemáticas	40	30	70
Total	75	75	150

En el cálculo de las probabilidades hay que construir la tabla de frecuencia relativa correspondiente a la tabla de contingencia.

Materia \ Colegio	Colegio A	Colegio B	Total
Ciencias	$\frac{35}{150} = 0{,}233$	$\frac{45}{150} = 0{,}3$	$\frac{80}{150} = 0{,}533$
Matemáticas	$\frac{40}{150} = 0{,}266$	$\frac{30}{150} = 0{,}2$	$\frac{70}{150} = 0{,}466$
Total	$\frac{75}{150} = 0{,}5$	$\frac{75}{150} = 0{,}5$	$\frac{150}{150} = 1$

Ahora, se puede realizar el cálculo de las siguientes probabilidades:

- Que se elija un estudiante del colegio A que aprobó matemáticas.
  Su probabilidad es del 26,6% porque se están relacionando las dos variables y ese valor corresponde a la intersección entre la fila de matemáticas y la columna del colegio A.
- Que se elija una persona que aprobó matemáticas.
  En este caso se toma solo el total de la fila de matemáticas, sin importar que sea del colegio A o del colegio B. Por tanto, la probabilidad es del 46,6%.
- Que se elija una persona del colegio A.
  Ahora se trabaja por columnas y no se tiene en cuenta si aprobó ciencias o matemáticas. En este caso, la probabilidad es 50%.
- Que se elija un estudiante que haya aprobado ciencias o pertenezca al colegio A.
  Como el conector "o" indica unión entre los elementos de la fila de ciencias y la columna del colegio, por tanto, se toma el total de ciencias (0,533) y se le adiciona los estudiantes que aprobaron matemáticas en el colegio A (0,266). Por tanto, la probabilidad de que pertenezca a ciencias o esté en el colegio A es:
  $P = 0{,}533 + 0{,}266 = 0{,}799$.
  Se concluye que hay un 79,9% de estudiantes que pertenecen al colegio A o que aprobaron ciencias.



Actividades

Ejercita: 1-2-3-4-5

1 Un experimento consiste en lanzar una moneda cuatro veces.

a. Encuentra el espacio muestral *S* por medio de un diagrama de árbol.
b. Determina el número de elementos del espacio muestral *S*.
c. Halla la probabilidad de los siguientes eventos:
A: obtener dos caras.
B: obtener máximo un sello.
C: no obtener sello.
D: obtener por lo menos una cara y un sello.

2 Se lanza un dado dos veces y se resta el resultado de sus caras.

a. Determina los puntos muestrales del experimento aleatorio.
b. Encuentra la probabilidad de los siguientes eventos:
M: obtener un número mayor que 3.
N: obtener un número menor que cero.
P: obtener un número par.
Q: obtener un número primo.
R: obtener un divisor de 30.

3 Rosita tiene que escoger una camisa y un pantalón. Si tiene una camisa roja, una camisa negra, una camisa azul, un pantalón negro y un pantalón azul, calcula la probabilidad de que escoja:

a. La camisa azul.
b. La camisa roja.
c. El pantalón azul.
d. La camisa roja y el pantalón negro.
e. Camisa negra y pantalón negro.

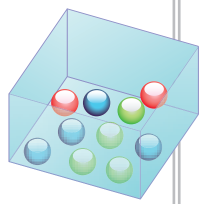
4 Al escribir números de tres cifras con los dígitos pares, cuál es la probabilidad de que:

a. El número empiece con 4.
b. El número contenga un múltiplo de 6.
c. El número termine en 6.
d. El número tenga el 4 o el 8.

5 Entre Lina, Paola, Sandra y Héctor se quiere escoger dos estudiantes para que asistan a un congreso. Indica cuál es la probabilidad de que:

a. Héctor sea escogido.
b. Paola o Lina sean el dúo escogido.
c. Sandra no asista.

Soluciona problemas



6 En una urna hay 4 bolas verdes, 2 rojas y 4 azules. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar, salga roja.

7 Adriana está organizando un bingo y marca los cartones con dos letras y tres números.

a. Determina la cantidad de cartones distintos que puede elaborar Adriana.
b. Encuentra la probabilidad de que los cartones contengan solo números pares.
c. Halla la probabilidad de que los cartones contengan una vocal y un número primo.

8 Con los dígitos impares se forman números de dos cifras (con repetición, por ejemplo, se acepta el número 33).

a. Determina cuántos números distintos se forman.
b. Halla el espacio muestral con un diagrama de árbol.
c. Halla la probabilidad de obtener un número múltiplo de 5.
d. Halla la probabilidad de que el número que se obtenga empiece con un número primo.

9 Una fábrica de ropa está organizada por dependencias: diseño, manufactura y confección. La siguiente tabla indica el número de empleados en cada dependencia, clasificados por género.

	Mujer	Hombre	Total
Diseño	45	15	60
Manufactura	85	100	185
Confección	100	30	130
Total	230	145	375

Si se elige aleatoriamente un empleado, responde:
a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea alguien que trabaje en manufactura?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y trabaje como diseñador?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje como manufacturera, si es mujer?

TALLER 10

Estadística

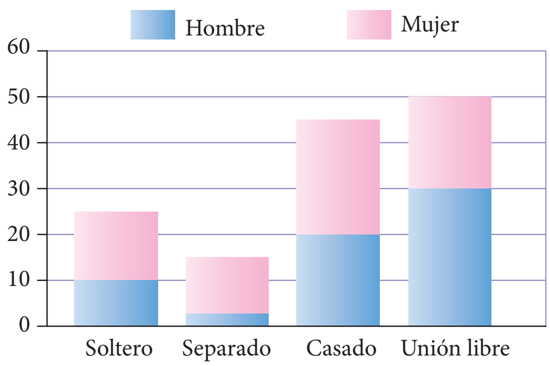
1 En cada situación identifica la variable de estudio y clasifícala en cualitativa nominal, cualitativa ordinal, cuantitativa discreta o cuantitativa continua.

a. Se hace un estudio sobre los resultados del ICFES en áreas básicas a nivel Bogotá.
b. Se realiza una encuesta en una comuna de Medellín para preguntar sobre el número de personas que hay en cada casa.
c. En Estados Unidos, se clasificó a cada persona de acuerdo con su religión y su inclinación a un partido político.
d. Se realizó una encuesta a 1.800 estudiantes de primaria y bachillerato sobre el sitio que más frecuentan el fin de semana. Se dieron tres opciones: cine, centro comercial y parque de diversiones.

2 Escribe una posible población y una posible muestra para que se pueda hacer un estudio estadístico con las siguientes variables.

a. Equipo de fútbol favorito.
b. Longitud en centímetros de algunos peces.
c. Cantidad de palabras leídas por minuto.
d. Cantidad de asistentes a un evento público.

3 Se realiza un estudio en un centro de rehabilitación para determinar el estado civil de hombres y mujeres. Los resultados se muestran en el siguiente diagrama:



a. Realiza una tabla de contingencia con los datos del diagrama.

Responde:

b. ¿Qué porcentaje del total de personas son separadas?
c. ¿Cuántas personas son hombres?
d. ¿Cuántas mujeres son separadas?
e. ¿Cuántas personas no son separadas ni solteras?

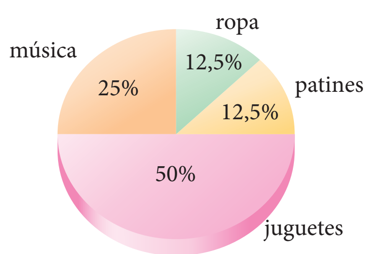
4 El rector de dos colegios decide comparar el número de estudiantes que llegan tarde en cada colegio. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Colegio 1				
13	44	27	39	26
29	44	44	30	38
39	38	45	29	28

Colegio 2				
44	38	45	39	26
28	40	35	40	28
35	45	46	29	20

a. Organiza la información de cada colegio en diagramas de tallo y hojas.
b. Encuentra la media, la mediana y la moda para el colegio 1 y realiza la interpretación.
c. Encuentra la media, la mediana y la moda para el colegio 2 y realiza la interpretación.
d. Organiza los datos del colegio 2 en una distribución de frecuencias sin intervalos.
e. Realiza el gráfico de barras para la tabla de frecuencias.
f. Elabora una distribución de frecuencias con intervalos juntando los datos de los dos colegios.
g. Realiza el histograma porcentual.
h. Representa los datos en un polígono de frecuencias relativas.
i. Construye la ojiva asociada a la distribución.
j. Responde, ¿cuál es el colegio con mayor número de estudiantes que llega tarde?
k. En el colegio 1, ¿qué porcentaje llega tarde entre 13 y 44 estudiantes?

5 En un jardín infantil se encuestó a 280 niños para saber qué regalos prefieren para Navidad. Los resultados se representan en el siguiente diagrama circular:



a. Elabora una tabla de distribución de frecuencia para los datos del diagrama circular.
b. Determina la moda en este estudio.
c. Identifica población, muestra, variable y tipo de variable.
d. Responde: ¿Cuál es la diferencia porcentual entre los dos regalos de mayor preferencia?

Probabilidad

6 Encuentra el espacio muestral en cada caso:

a. Sacar dos tarjetas de una bolsa donde hay cuatro tarjetas marcadas cada una con los números 2, 5, 7, 10.
b. Lanzar dos dados a la vez.
c. Lanzar un dado y una moneda al tiempo.
d. Establecer los tres primeros lugares en una competencia.

7 En un restaurante se ofrecen combos conformados por una comida y una bebida, que los clientes pueden armar a su gusto. Los productos que se ofrecen son:

- *comida*: hamburguesa, pizza y perro caliente.
- *bebida*: jugo, limonada, agua y gaseosa.

a. Encuentra el número de maneras diferentes para armar combos.
b. Usa el diagrama de árbol para representar todos los posibles resultados.
c. Encuentra la probabilidad de que en un combo se pida gaseosa.
d. Calcula la probabilidad de que en un combo se pida hamburguesa o pizza.

8 Entre Daniela, Carolina, Laura, Paula y Ana se va a seleccionar a tres niñas para representar al grado noveno en las olimpiadas matemáticas.

a. Determina el número de posibilidades para escoger las tres niñas.
b. Representa las posibles elecciones en un diagrama de árbol.
c. Calcula la probabilida de que Daniela sea seleccionada.
d. Encuentra la probabilidad de que ni Laura ni Paula sean seleccionadas.

9 Mario, Pedro y Daniel se presentan en la obra de teatro para interpretar los siguientes personajes: rey, príncipe y esclavo.

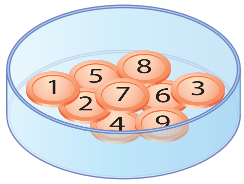
a. Escribe las distintas posibilidades para organizar los papeles para la interpretación.
b. Calcula la probabilidad de que Mario sea el rey.
c. Determina la probabilidad de que Pedro sea el príncipe y que Mario sea el rey.

10 Determina cuántos números de tres cifras, sin repetir números, se pueden formar con los dígitos impares 1, 3, 5, 7, 9.

11 Determina cuántos números de tres cifras, repetidas o no repetidas, pueden formarse con los dígitos pares 2, 4, 6, 8, 0.

Luego, halla las siguientes probabilidades:
a. Probabilidad de obtener 248.
b. Probabilidad de obtener tres cifras iguales.
c. Probabilidad de obtener un número par.
d. Probabilidad de obtener un número primo.
e. Probabilidad de obtener un número par o un múltiplo de 3.

12 Se enumeraron nueve fichas con los números del 1 al 9, se colocaron en un recipiente y se mezclaron:

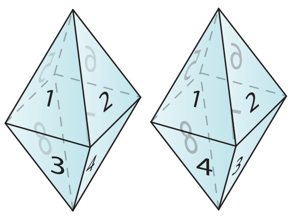


a. Paula extrae una ficha del recipiente. Calcula la probabilidad de que Paula saque una ficha con un número impar.
b. Determina la cantidad de números distintos que se pueden hacer con las nueve fichas si cada ficha se saca del recipiente y no se vuelve a ingresar.
c. Calcula la cantidad de números diferentes que se pueden formar con las nueve fichas si se saca una ficha, se escribe el número y se vuelve a ingresar al recipiente.

13 Escribe todas las formas posibles de sentar a tres de cinco personas en tres sillas.

14 Si las letras en Colombia se arreglan en línea al azar, tomando tres de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que en el arreglo aparezca la palabra MIA?

15 Si se lanzan dos dados de ocho caras, halla las siguientes probabilidades:



a. Probabilidad de obtener dos tres.
b. Probabilidad de obtener dos unos.
c. Probabilidad de obtener dos números impares.
d. Probabilidad de obtener un número par y un número primo.

EN SÍNTESIS...

Estadística

Es la ciencia que se encarga de recoger, organizar, representar, analizar y obtener conclusiones a partir de datos obtenidos en diferentes estudios estadísticos.
La **población** es el conjunto de todos los individuos de los cuales se obtiene información sobre el fenómeno que se estudia.
Una **muestra** es un subconjunto representativo de una población sobre el cual se recogen los datos.

Técnicas de conteo

Las técnicas de conteo son:
Principio de multiplicación: importa el orden y puede haber repetición. Se calcula como $\#S = N_1 \times N_2 \times N_3 \ldots$
Permutación: importa el orden pero no hay repetición. Se calcula como: ${}_NP_n = \frac{N!}{(N-n)!}$
Combinación: no importa el orden y no hay repetición. Se calcula como: ${}_NC_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
Las tres técnicas determinan cuántos elementos tiene el espacio muestral.

Variables estadísticas

Una **variable estadística** es cada una de las características o propiedades que se pueden estudiar en una población o muestra. Las variables se clasifican en **cualitativas** y **cuantitativas**.
Las **variables cualitativas** se caracterizan mediante: distribución de frecuencias, diagrama de barras, diagrama circular y moda.
Las **variables cuantitativas** se caracterizan mediante: distribución de frecuencias, diagrama de tallo y hojas, diagrama de barras, histogramas, polígono de frecuencias, ojivas, medidas de tendencia central.

Probabilidad

Es la rama de las matemáticas que estudia aquellos experimentos cuyos resultados pueden variar entre una ejecución y otra. Este tipo de experimentos se denominan **aleatorios**.
Espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se simboliza S.
Evento: es cualquier subconjunto del espacio muestral, cuyos elementos tienen una característica en común. Se simboliza con letras mayúsculas.

Medidas de tendencia central

Media: es el promedio aritmético de todos los datos.
Moda: indica el valor que más se repite o el intervalo con mayor frecuencia.
Mediana: es el punto central de los valores de un conjunto de datos después de haber sido ordenados.

Cálculo de probabilidades

La probabilidad con la que puede suceder un evento es un número real entre 0 y 1.
Existen dos procedimientos para la probabilidad de un evento: el *enfoque clásico* y el *enfoque como frecuencia relativa*.
Enfoque clásico: $P(E) = \frac{\#E}{\#S}$, donde $\#E$ es la cantidad de puntos muestrales del evento E y $\#S$ es la cantidad de puntos en el espacio muestral S.
Enfoque como frecuencia relativa: $P(E) = \frac{f}{n} = fr$, donde f es la frecuencia absoluta del evento y n el total de datos.

Y esto que aprendí, ¿PARA QUÉ ME SIRVE?

Para interpretar datos relacionados con el deporte.

Estadística en la NBA

La NBA o National Basketball Asociation es una liga estadounidense de baloncesto profesional, cuyos campeonatos llamados los *Playoffs* de la NBA son tres rondas de competición entre dieciséis equipos repartidos en la Conferencia Oeste y la Conferencia Este.

Los ganadores de la primera ronda, o cuartos de final, avanzan a las semifinales de Conferencia, luego a las finales de Conferencia, y los vencedores de cada conferencia disputan las finales de la NBA.

Los Angeles Lakers se coronaron campeones de la temporada de la NBA (2008-2009). Este equipo tiene el mejor porcentaje de victorias (61,5%), el mayor número de participaciones en las finales (30), y el segundo mayor número de títulos 15, después de Boston Celtics con 17. Además es una de las franquicias más valiosas de baloncesto en Estados Unidos.

Para la temporada 2009-2010, los Angeles tendrán la siguiente plantilla de jugadores:

Nombre	Edad	Talla m	Salario
Ron Artest	29	2,01	$5.854.000
Shannon Brown	23	1,93	$1.990.000
Kobe Bryant	30	1,98	$23.034.375
Andrew Bynum	21	2,13	$12.500.000
Jordan Farmar	22	1,88	$1.947.240
Derek Fisher	34	1,85	$5.048.000
Pau Gasol	29	2,13	$16.452

Nombre	Edad	Talla m	Salario
D.J. Mbenga	28	2,13	$959.111
Adam Morrison	24	2,03	$5.257.229
Josh Powell	26	2,06	$959.111
Sasha Vujacic	25	2,01	$5.000.000
Luke Walton	29	2,03	$4.840.000
Sun Yue	23	2,06	$736.420

La media de la estatura de los jugadores de los Angeles Lakers 2009-2010 es:

$$\overline{X} = \frac{2{,}01 + 1{,}93 + 1{,}98 + 2{,}13 + 1{,}88 + 1{,}85 + 2{,}13 + 2{,}13 + 2{,}03 + 2{,}06 + 2{,}01 + 2{,}03 + 2{,}06}{13} = 2{,}017 \text{ m}$$

Recupera información

1. Consulta cuáles son los equipos de baloncesto que juegan en la NBA.

Interpreta

2. Explica la afirmación "Es una de las franquicias más valiosas de baloncesto en Estados Unidos".

Plantea y actúa

3. Determina la media y la mediana del salario de los jugadores. Luego, saca una conclusión.
4. Realiza una representación de los datos suministrados en la tabla.
5. Consulta sobre la plantilla de otro equipo de la NBA y compárala con la plantilla de los Angeles Lakers.