Image 100/Corbis

CAPÍTULO 3

FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Las funciones definidas por expresiones de polinomios se denominan funciones polinomiales. Las gráficas de funciones polinomiales pueden tener numerosos picos y valles; esto las hace modelos apropiados para muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, la propietaria de una fábrica observa que si ella aumenta el número de trabajadores, aumenta la productividad, pero si hay demasiados trabajadores entonces la productividad empieza a disminuir. Esta situación está modelada por una función polinomial de grado 2 (una función cuadrática). Como otro ejemplo, cuando se golpea un balón de volibol, éste primero sube y luego baja, siguiendo una trayectoria que también está modelada por una función cuadrática. Las gráficas de funciones polinomiales son curvas sin irregularidades que se usan para diseñar muchas cosas. Por ejemplo, los diseñadores de botes de vela unen partes de las gráficas de diferentes funciones cúbicas (llamadas curvas paramétricas) para hacer las curvas del casco de un bote de velas.

3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal ▶ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ▶ Modelado con funciones cuadráticas

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las expresiones de polinomios están definidas en la Sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Éstas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1 x + a_0$, respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal

Para una definición geométrica de parábolas, vea la Sección 11.1.

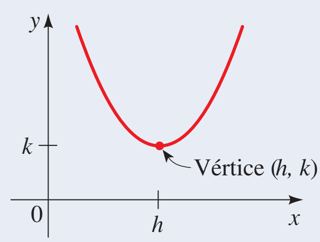
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

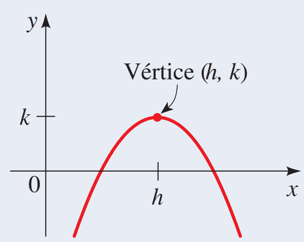
Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \ a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \ a < 0$

EJEMPLO 1 | Forma normal de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

(a) Exprese f en forma normal. **(b)** Trace la gráfica de f.

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.

$f(x) = 2(x-3)^2 + 5$

El vértice es (3, 5)

SOLUCIÓN

(a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 2\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x-3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

La forma normal es $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

(b) La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en (3, 5), y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en y es $f(0) = 23$.

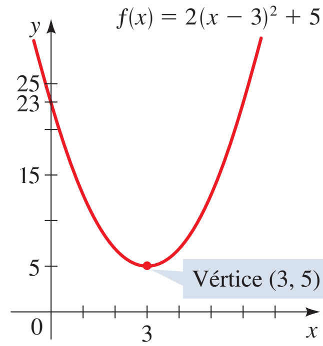


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

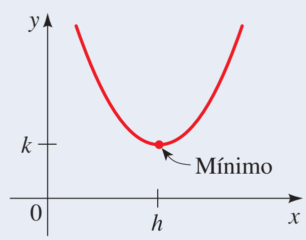
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la Figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice (3, 5) es el punto más bajo en la gráfica.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

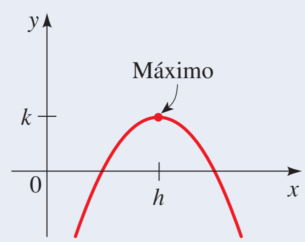
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x-h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el valor máximo de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a > 0$



$f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a < 0$

EJEMPLO 2 | Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

(a) Exprese f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor mínimo de f.

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de términos en } x \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 5 \cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

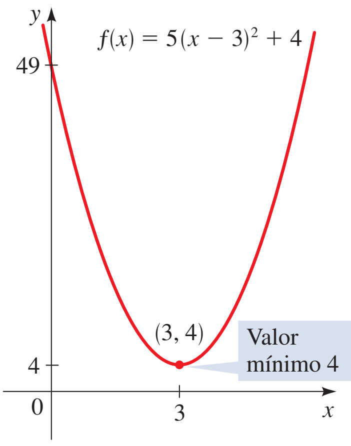


FIGURA 2

(b) La gráfica es la parábola que tiene su vértice en (3, 4) y abre hacia arriba, como se ve en la Figura 2.

(c) Como el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **25**

EJEMPLO 3 | Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

(a) Exprese f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor máximo de f.

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos en } x \\ &= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: Sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro de paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\ &= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

(b) De la forma normal vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, encontramos los puntos de intersección. El punto de intersección en y es $f(0) = 2$. Para hallar los puntos de intersección en x, hacemos $f(x) = 0$ y factorizamos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 && \text{Haga } y = 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Multiplique por } -1 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección en x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la Figura 3.

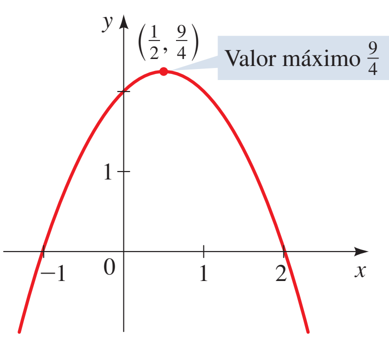


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

(c) Como el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

Expresar una función cuadrática en forma normal nos ayuda a trazar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en hallar el valor máximo o mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \frac{b^2}{4a^2} \text{ dentro de paréntesis, reste } a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice}
\end{aligned}
$$

Esta ecuación está en forma normal con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Como el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

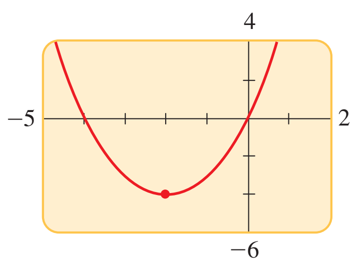
Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

EJEMPLO 4 | Hallar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

(a) $f(x) = x^2 + 4x$ **(b)** $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$



El valor mínimo ocurre en $x = -2$.

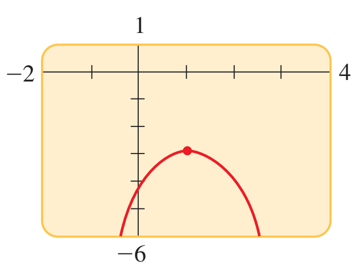
SOLUCIÓN

(a) Ésta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Como $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

(b) Ésta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35** ■

Modelado con funciones cuadráticas

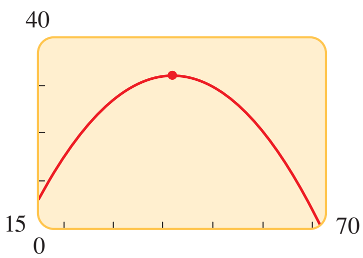
Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicación* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

EJEMPLO 5 | Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento M para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \qquad 15 \le s \le 70$$

donde s es la rapidez en mi/h y M se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?



El rendimiento máximo ocurre a 42 mi/h.

SOLUCIÓN La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(-\frac{1}{28}\right)} = 42$$

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por lo tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67** ■

EJEMPLO 6 | Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15,000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

SOLUCIÓN

(a) Exprese verbalmente el modelo. El modelo que buscamos es una función que dé el ingreso para cualquier precio del boleto.

ingreso = precio del boleto × asistencias

Escoja la variable. Hay dos cantidades que varían: precio del boleto y asistencia. Como la función que buscamos depende del precio, hacemos

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, expresamos la asistencia en términos de x.

Verbalmente	En álgebra
Precio del boleto	x
Cantidad que baja precio del boleto	$14 - x$
Aumento en asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x)$

Establezca el modelo. El modelo que buscamos es la función R que da el ingreso para un determinado precio de boleto x.

$$\boxed{\text{ingreso}} = \boxed{\text{precio del boleto}} \times \boxed{\text{asistencias}}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$

$$R(x) = x(23{,}500 - 1000x)$$

$$R(x) = 23{,}500x - 1000x^2$$

(b) Use el modelo. Como R es función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23{,}500$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23{,}500}{2(-1000)} = 11.75$$

Por lo tanto, el precio de boleto de \$11.75 da el máximo ingreso.

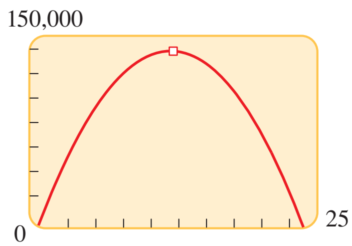
(c) Use el modelo. Deseamos hallar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

$$23{,}500x - 1000x^2 = 0 \qquad \text{Haga } R(x) = 0$$

$$23.5x - x^2 = 0 \qquad \text{Divida entre 1000}$$

$$x(23.5 - x) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \qquad \text{Despeje } x$$



La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es \$11.75.

Por lo tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de \$23.50 es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie va a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

3.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma normal, completamos el_________.

2. La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma normal.

(a) La gráfica de f es una parábola con vértice (___,___).

(b) Si $a > 0$, la gráfica de f abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de f.

(c) Si $a < 0$, la gráfica de f abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de f.

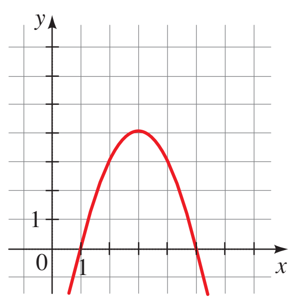
3. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____,___), y $f(3) =$ ____es el valor (mínimo/máximo)____de f.

4. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____,___), y $f(3) =$ ____ es el valor (mínimo/máximo)____ de f.

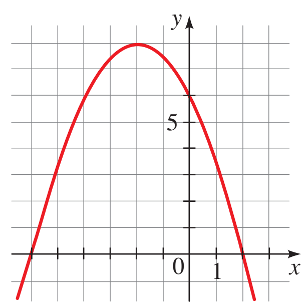
HABILIDADES

5-8 ■ Nos dan la gráfica de una función cuadrática f. **(a)** Encuentre las coordenadas del vértice. **(b)** Encuentre el valor máximo o mínimo de f. **(c)** Encuentre el dominio y rango de f.

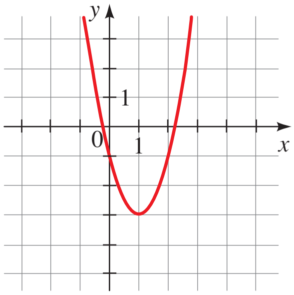
5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



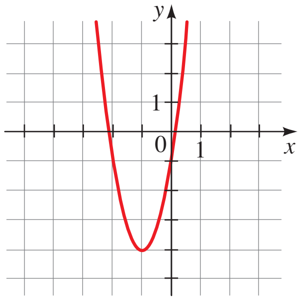
6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9-22 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección x y y. **(c)** Trace su gráfica.

9. $f(x) = x^2 - 6x$ **10.** $f(x) = x^2 + 8x$

11. $f(x) = 2x^2 + 6x$ **12.** $f(x) = -x^2 + 10x$

13. $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **14.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$

15. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$ **16.** $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

17. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ **18.** $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

19. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$ **20.** $f(x) = 2x^2 + x - 6$

21. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$ **22.** $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

23-32 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Trace su gráfica. **(c)** Encuentre su valor máximo o mínimo.

23. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **24.** $f(x) = x^2 - 8x + 8$

25. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ **26.** $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

27. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$ **28.** $f(x) = 1 - 6x - x^2$

29. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$ **30.** $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

31. $h(x) = 1 - x - x^2$ **32.** $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

33-42 ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

33. $f(x) = x^2 + x + 1$ **34.** $f(x) = 1 + 3x - x^2$

35. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$ **36.** $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

37. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$ **38.** $g(x) = 100x^2 - 1500x$

39. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ **40.** $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

41. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$ **42.** $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

43. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

44. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

45-48 ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

45. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **46.** $f(x) = x^2 - 2x - 3$

47. $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$ **48.** $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

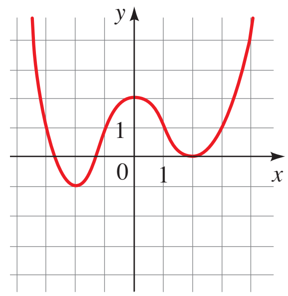
49-50 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Use una calculadora graficadora para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática f, correcta a dos lugares decimales. **(b)** Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de f, y compárelo con su respuesta de la parte (a).

49. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

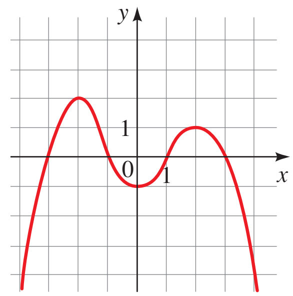
50. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

51-54 ■ Encuentre todos los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.

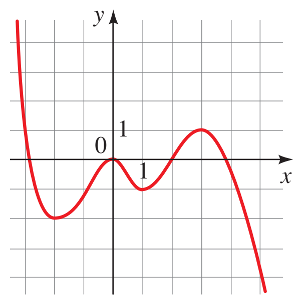
51.



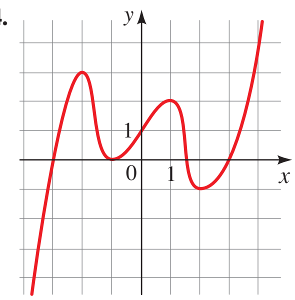
52.



53.



54.



55-62 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que se presenta cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

55. $f(x) = x^3 - x$

56. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

57. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

58. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

59. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

60. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

61. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

62. $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

APLICACIONES

63. Altura de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

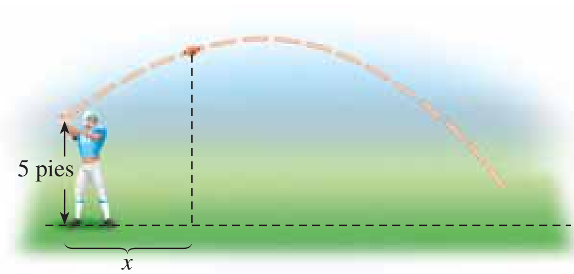
64. Trayectoria de un balón Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45º con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde x es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

(a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.

(b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



65. Ingresos Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

66. Ventas Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende x latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

67. Publicidad La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

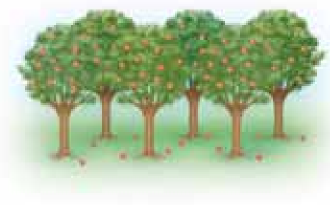
donde n es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

68. Productos farmacéuticos Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración de la droga en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

69. Agricultura El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por lo tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



70. Agricultura En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce unas 10 libras de uvas en una temporada cuando unas 700 vides están plantadas por acre. Por cada vid individual que se planta, la producción de cada vid disminuye alrededor de 1 por ciento. Por lo tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde n es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

71-74 ■ Use las fórmulas de esta sección par dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque en el modelado: Modelado con funciones* en las páginas 220-221.

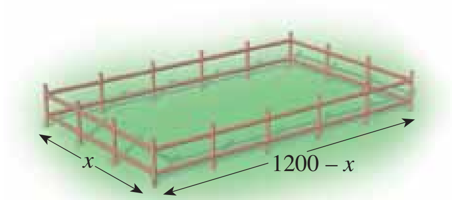
71. Problema 21 **72.** Problema 22

73. Problema 25 **74.** Problema 24

75. Cercar un corral para caballos Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

(a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.

(b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.

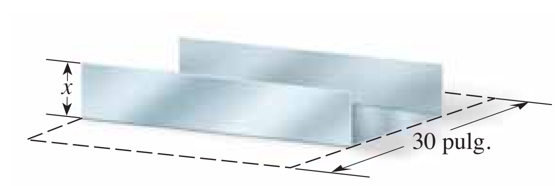


76. Hacer un canal para agua de lluvia Un canal para agua llovediza se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se ve en la figura.

(a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x.

(b) Encuentre el valor de x que lleve al máximo el área de sección transversal del canal.

(c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



77. Ingresos en un estadio Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55,000 espectadores. Con el precio del boleto en \$10, el promedio de asistencia en partidos recientes ha sido de 27,000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia aumenta en 3000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo los ingresos por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto como para no generar ingresos?

78. Maximizar utilidades Una sociedad observadora de aves en cierta comunidad hace y vende alimentadores sencillos de aves, para recaudar dinero para sus actividades de conservación. Los materiales para cada alimentador cuestan \$6, y la sociedad vende un promedio de 20 por semana a un precio de \$10 cada uno. La sociedad ha estado considerando elevar el precio, de modo que lleva a cabo un estudio y encuentra que por cada dólar de aumento, pierde 2 ventas por semana.

(a) Encuentre una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por alimentador.

(b) ¿Qué precio debe cobrar la sociedad por cada alimentador para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

79. Vértice y puntos de intersección x Sabemos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - m)(x - n)$ es una parábola. Trace una gráfica aproximada del aspecto que tendría esa parábola. ¿Cuáles son los puntos de intersección x de la gráfica de f? ¿Puede el lector saber de su gráfica cuál es la coordenada x del vértice en términos de m y n? (Use la simetría de la parábola.) Confirme su respuesta al expandir y usar las fórmulas de esta sección.

80. Máximo de una función polinomial de cuarto grado Encuentre el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + x^2 - x^4$$

[*Sugerencia:* Sea $t = x^2$.]

3.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

Graficar funciones polinomiales básicas ▶ Comportamiento final y el término principal ▶ Uso de ceros para graficar funciones polinomiales ▶ Forma de la gráfica cerca de un cero ▶ Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

En esta sección estudiamos funciones polinomiales de cualquier grado. Pero antes de trabajar con funciones polinomiales, debemos estar de acuerdo con cierta terminología.

FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n, el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6.

Coeficiente principal 3

Grado 5

Término constante -6

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$

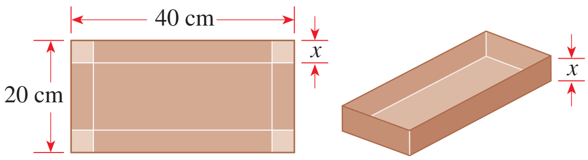
Coeficientes 3, 6, -2, 1, 7 y -6

83. Volumen de una caja Se ha de construir una caja con una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados de longitud x de lado de cada esquina y doblando los lados hacia arriba, como se ve en la figura.

(a) Exprese el volumen V de la caja como función de x.

(b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

(c) Trace una gráfica de la función V, y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.

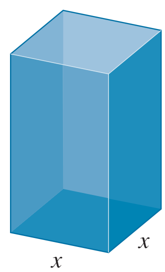


84. Volumen de una caja Una caja de cartón tiene base cuadrada, con cada arista de la caja con longitud de x pulgadas, como se ve en la figura. La longitud total de las 12 aristas de la caja es de 144 pulgadas.

(a) Demuestre que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = 2x^2(18 - x)$.

(b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

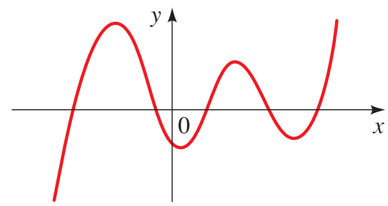
(c) Trace una gráfica de la función V y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

85. Gráficas de potencias grandes Grafique las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = x^5$, para $-1 \leq x \leq 1$, en los mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo piensa usted que se verá la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo? ¿Qué se puede decir de $y = x^{101}$? Haga una tabla de valores para confirmar sus respuestas.

86. Número máximo de extremos locales ¿Cuál es el grado más pequeño posible que puede tener la función polinomial cuya gráfica se muestra? Explique.



87. Número posible de extremos locales ¿Es posible que una polinomial de tercer grado tenga exactamente un extremo local? ¿Una polinomial de cuarto grado puede tener exactamente dos extremos locales? ¿Cuántos extremos locales pueden tener polinomiales de tercero, cuarto, quinto y sexto grados? (Considere el comportamiento final de esas funciones polinomiales.) A continuación, dé un ejemplo de una función polinomial que tenga seis extremos locales.

88. ¿Situación imposible? ¿Es posible que una función polinomial tenga dos máximos locales y no tenga un mínimo local? Explique.

3.3 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

División larga de polinomios ▶ División sintética ▶ Los teoremas del residuo y factor

Hasta este punto en este capítulo hemos estado estudiando funciones polinomiales *gráficamente*. En esta sección empezamos por estudiar polinomios *algebraicamente.* La mayor parte de nuestro trabajo se ocupará de factorizar polinomios y, para factorizar, necesitamos saber cómo dividir polinomios.

▼ División larga de polinomios

La división de polinomios es muy semejante al conocido proceso de dividir números. Cuando dividimos 38 entre 7, el cociente es 5 y el residuo es 3. Escribimos

Dividendo

Residuo

$$\frac{38}{7} = 5 + \frac{3}{7}$$

Divisor

Cociente

Para dividir polinomios, usamos división larga, como sigue.

ALGORITMO DE DIVISIÓN

Si $P(x)$ y $D(x)$ son funciones polinomiales, con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomiales únicas $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de grado menor al grado de $D(x)$, de modo que

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{D(x)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Residuo}}$$

Las funciones polinomiales $P(x)$ y $D(x)$ se denominan **dividendo** y **divisor**, respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente**, y $R(x)$ es el **residuo**.

Para escribir el algoritmo de división de otro modo, dividimos todo entre $D(x)$:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

EJEMPLO 1 | División larga de polinomios

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$.

SOLUCIÓN El *dividendo* es $6x^2 - 26x + 12$ y el *divisor* es $x - 4$. Empezamos por acomodarlos como sigue:

$$x - 4\,\overline{)\,6x^2 - 26x + 12}$$

A continuación dividimos el término principal del dividendo entre el término principal del divisor para obtener el primer término del cociente: $6x^2/x = 6x$. En seguida multiplicamos el divisor por $6x$ y restamos el resultado del dividendo

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \quad 6x \\
x - 4 & \overline{)\,6x^2 - 26x + 12} \\
 & \underline{\;6x^2 - 24x\;} \\
 & \qquad\; -2x + 12
\end{array}$$

Divida términos principales: $\dfrac{6x^2}{x} = 6x$

Multiplique: $6x(x - 4) = 6x^2 - 24x$

Reste y "baje" 12

Repetimos el proceso usando el último renglón $-2x + 12$ como dividendo.

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \quad 6x^2 - 2 \\
x - 4 & \overline{)\,6x^2 - 26x + 12} \\
 & \underline{\;6x^2 - 24x\;} \\
 & \qquad\; -2x + 12 \\
 & \qquad\; \underline{-2x + 8} \\
 & \qquad\qquad\quad\; 4
\end{array}$$

Divida términos principales: $\dfrac{-2x}{x} = -2$

Multiplique: $-2(x - 4) = -2x + 8$

Reste

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. El último renglón que contenga el *residuo*, y el renglón superior contienen el *cociente*. El resultado de la división puede interpretarse en cualquiera de dos formas.

$$\frac{\overbrace{6x^2 - 26x + 12}^{\text{Dividendo}}}{\underbrace{x - 4}_{\text{Divisor}}} = \overbrace{6x - 2}^{\text{Cociente}} + \frac{\overbrace{4}^{\text{Residuo}}}{x - 4}$$

o

$$\underbrace{6x^2 - 26x + 12}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x - 4)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(6x - 2)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{4}_{\text{Residuo}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

EJEMPLO 2 | División larga de polinomios

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre polinomiales $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

SOLUCIÓN Usamos división larga después de insertar primero el término $0x^3$ en el dividendo para asegurar que las columnas queden alineadas correctamente.

$$
\begin{array}{r l}
 & 4x^2 + 2x \\
2x^2 - x + 2 & \overline{)\,8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1} \\
 & \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} \qquad \text{Multiplique el divisor por } 4x^2 \\
 & \phantom{)8x^4 +{}} 4x^3 - 2x^2 - 3x \qquad \text{Reste} \\
 & \phantom{)8x^4 +{}} \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} \qquad \text{Multiplique el divisor por } 2x \\
 & \phantom{)8x^4 + 4x^3 - 2x^2 {}} -7x + 1 \qquad \text{Reste}
\end{array}
$$

El proceso se completa en este punto porque $-7x + 1$ es de menor grado que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la división larga de líneas antes vemos que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, de modo que

$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

División sintética

La **división sintética** es un método rápido de dividir polinomios; se puede usar cuando el divisor es de la forma $x - c$. En división sintética escribimos sólo las partes esenciales de la división larga. Compare las siguientes divisiones larga y sintética, en las que dividimos $2x^3 - 7x^2 + 5$ por $x - 3$. (Explicaremos cómo realizar la división sintética en el Ejemplo 3.)

División larga

$$
\begin{array}{r l}
 & \underbrace{2x^2 - x - 3}_{\text{Cociente}} \\
x - 3 & \overline{)\,2x^3 - 7x^2 + 0x + 5} \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & -x^2 + 0x \\
 & \underline{-x^2 + 3x} \\
 & -3x + 5 \\
 & \underline{-3x + 9} \\
 & \phantom{)2x^3 - x^2 - 3x +{}} \underbrace{-4}_{\text{Residuo}}
\end{array}
$$

División sintética

$$
\begin{array}{c|c c c c}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
 & & 6 & -3 & -9 \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad -1 \quad -3}_{\text{Cociente}} & & & \underbrace{-4}_{\text{Residuo}}
\end{array}
$$

Observe que en la división sintética abreviamos $2x^3 - 7x^2 + 5$ al escribir sólo los coeficientes: $2, \ -7, \ 0, \ 5$ y en lugar de $x - 3$ escribimos simplemente 3. (Escribir 3 en lugar de -3 nos permite sumar en lugar de restar, pero esto cambia el signo de todos los números que aparecen en las cajas color oro.)

El siguiente ejemplo muestra cómo se realiza la división sintética.

EJEMPLO 3 | División sintética

Use división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

SOLUCIÓN Empezamos por escribir los coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo.

$$
\text{Divisor } x - 3 \rightarrow \quad
\begin{array}{c|c c c c}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array}
\quad \leftarrow \text{Dividendo } 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5
$$

Bajamos el 2, multiplicamos $3 \cdot 2 = 6$ y escribimos el resultado en el renglón de en medio. A continuación, sumamos.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & & \\ \hline & \boxed{2} & -1 & & \end{array}$$

Multiplique: $3 \cdot 2 = 6$

Sume: $-7 + 6 = -1$

Repetimos este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & \boxed{-1} & -3 & \end{array}$$

Multiplique: $3(-1) = -3$

Sume: $0 + (-3) = -3$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{-3} & -4 \end{array}$$

Multiplique: $3(-3) = -9$

Sume: $5 + (-9) = -4$

Cociente
$2x^2 - x - 3$

Residuo
-4

Del último renglón de la división sintética vemos que el cociente es $2x^2 - x - 3$ y el residuo es -4. Por lo tanto,

$$2x^3 - 7x^2 + 5 = (x - 3)(2x^2 - x - 3) - 4$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

Los teoremas del residuo y factor

El siguiente teorema muestra la forma en que la división sintética se puede usar para evaluar funciones polinomiales fácilmente.

TEOREMA DEL RESIDUO

Si la función polinomial $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$.

DEMOSTRACIÓN Si el divisor del Algoritmo de División es de la forma $x - c$ para algún número real c, entonces el residuo debe ser constante (porque el grado del residuo es menor que el grado del divisor). Si a esta constante la llamamos r, entonces

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Sustituyendo x por c en esta ecuación, obtenemos $P(c) = (c - c) \cdot Q(x) + r = 0 + r = r$, esto es, $P(c)$ es el residuo r.

EJEMPLO 4 | Uso del Teorema del Residuo para hallar el valor de una función polinomial

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

(a) Encuentre el cociente y residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

(b) Use el Teorema del Residuo para hallar $P(-2)$.

SOLUCIÓN

(a) Como $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\ & & -6 & 2 & 4 & -8 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5 \end{array}$$

El residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, y el residuo es 5.

(b) Por el Teorema del Residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. De la parte (a) el residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39** ■

El siguiente teorema dice que los *ceros* de polinomiales corresponden a *factores*; utilizamos este dato en la Sección 3.2 para graficar funciones polinomiales.

TEOREMA DEL FACTOR

c es cero de P si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

Inversamente, si $P(c) = 0$, entonces por el Teorema del Residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + 0 = (x - c) \cdot Q(x)$$

de modo que $x - c$ es un factor de $P(x)$. ■

EJEMPLO 5 | Factorizar una función polinomial usando el Teorema del Factor

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Demuestre que $P(1) = 0$ y use este dato para factorizar $P(x)$ completamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ x - 1 \overline{) x^3 + 0x^2 - 7x + 6} \\ \underline{x^3 - x^2 } \\ x^2 - 7x \\ \underline{x^2 - x } \\ -6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN Sustituyendo, vemos que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el Teorema del Factor esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando división sintética o larga (mostrada al margen), vemos que

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 6 && \text{Polinomial dada} \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6) && \text{Vea al margen} \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 3) && \text{Factorice la cuadrática } x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **53** Y **57** ■

EJEMPLO 6 | Hallar una función polinomial con ceros especificados

Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga ceros -3, 0, 1 y 5.

SOLUCIÓN Por el Teorema del Factor $x - (-3)$, $x - 0$, $x - 1$ y $x - 5$ deben todos ellos ser factores de la función polinomial deseada.

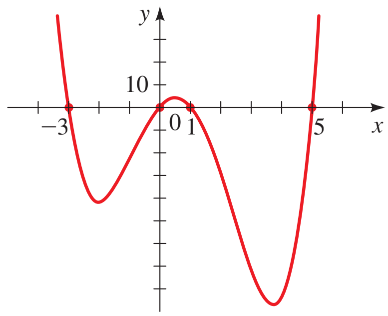


FIGURA 1
$P(x) = (x + 3)x(x - 1)(x - 5)$ tiene ceros -3, 0, 1 y 5.

Sea

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+3)(x-0)(x-1)(x-5) \\ &= x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x \end{aligned}$$

Como $P(x)$ es de grado 4, es una solución del problema. Cualquiera otra solución del problema debe ser un múltiplo constante de $P(x)$, porque sólo una multiplicación por una constante no cambia el grado.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

La función polinomial P del Ejemplo 6 está graficada en la Figura 1. Observe que los ceros de P corresponden a los puntos de intersección x de la gráfica.

3.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si dividimos la polinomial P entre el factor $x - c$ y obtenemos la ecuación $P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$, entonces decimos que $x - c$ es el divisor, $Q(x)$ es el ______, y $R(x)$ es el ________.

2. **(a)** Si dividimos la polinomial $P(x)$ entre el factor $x - c$ y obtenemos un residuo de 0, entonces sabemos que c es un _____ de P.

   (b) Si dividimos la polinomial $P(x)$ entre el factor $x - c$ y obtenemos un residuo de k, entonces sabemos que $P(c) =$ _____.

HABILIDADES

3-8 ■ Nos dan dos funciones polinomiales P y D. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese P en la forma $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

3. $P(x) = 3x^2 + 5x - 4, \quad D(x) = x + 3$
4. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 1, \quad D(x) = x - 1$
5. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x, \quad D(x) = 2x - 3$
6. $P(x) = 4x^3 + 7x + 9, \quad D(x) = 2x + 1$
7. $P(x) = x^4 - x^3 + 4x + 2, \quad D(x) = x^2 + 3$
8. $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - x - 3, \quad D(x) = x^2 - 2$

9-14 ■ Nos dan dos funciones polinomiales P y D. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese el cociente $P(x)/D(x)$ en la forma

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

9. $P(x) = x^2 + 4x - 8, \quad D(x) = x + 3$
10. $P(x) = x^3 + 6x + 5, \quad D(x) = x - 4$
11. $P(x) = 4x^2 - 3x - 7, \quad D(x) = 2x - 1$
12. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5, \quad D(x) = 3x - 4$
13. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2, \quad D(x) = x^2 + 4$
14. $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 1, \quad D(x) = x^2 + x - 1$

15-24 ■ Encuentre el cociente y residuo usando división larga.

15. $\dfrac{x^2 - 6x - 8}{x - 4}$
16. $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x + 6}{x - 2}$
17. $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$
18. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{3x + 6}$
19. $\dfrac{x^3 + 6x + 3}{x^2 - 2x + 2}$
20. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 - 20x - 5}{x^2 + x + 3}$
21. $\dfrac{6x^3 + 2x^2 + 22x}{2x^2 + 5}$
22. $\dfrac{9x^2 - x + 5}{3x^2 - 7x}$
23. $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$
24. $\dfrac{2x^5 - 7x^4 - 13}{4x^2 - 6x + 8}$

25-38 ■ Encuentre el cociente y residuo usando división sintética.

25. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$
26. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$
27. $\dfrac{3x^2 + 5x}{x - 6}$
28. $\dfrac{4x^2 - 3}{x + 5}$
29. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2}$
30. $\dfrac{3x^3 - 12x^2 - 9x + 1}{x - 5}$
31. $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3}$
32. $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x - 2}$
33. $\dfrac{x^5 + 3x^3 - 6}{x - 1}$
34. $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 3}$

35. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - \frac{1}{2}}$

36. $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + 1}{x + \frac{2}{3}}$

37. $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ **38.** $\dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$

39-51 ■ Use división sintética y el Teorema del Residuo para evaluar $P(c)$.

39. $P(x) = 4x^2 + 12x + 5, \quad c = -1$

40. $P(x) = 2x^2 + 9x + 1, \quad c = \frac{1}{2}$

41. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 6, \quad c = 2$

42. $P(x) = x^3 - x^2 + x + 5, \quad c = -1$

43. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7, \quad c = -2$

44. $P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 9x - 200, \quad c = 11$

45. $P(x) = 5x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 36x + 14, \quad c = -7$

46. $P(x) = 6x^5 + 10x^3 + x + 1, \quad c = -2$

47. $P(x) = x^7 - 3x^2 - 1, \quad c = 3$

48. $P(x) = -2x^6 + 7x^5 + 40x^4 - 7x^2 + 10x + 112, \quad c = -3$

49. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad c = \frac{2}{3}$

50. $P(x) = x^3 - x + 1, \quad c = \frac{1}{4}$

51. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 8, \quad c = 0.1$

52. Sea

$$P(x) = 6x^7 - 40x^6 + 16x^5 - 200x^4 - 60x^3 - 69x^2 + 13x - 139$$

Calcule $P(7)$ **(a)** usando división sintética y **(b)** sustituyendo $x = 7$ en la función polinomial y evaluando directamente.

53-56 ■ Use el Teorema del Factor para demostrar que $x - c$ es un factor de $P(x)$ para el (los) valor(es) dado(s) de c.

53. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad c = 1$

54. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10, \quad c = 2$

55. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 5, \quad c = \frac{1}{2}$

56. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 27x + 63, \quad c = 3, -3$

57-58 ■ Demuestre que el (los) valor(es) dado(s) de c son ceros de $P(x)$, y encuentre todos los otros ceros de $P(x)$.

57. $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15, \quad c = 3$

58. $P(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6, \quad c = \frac{1}{3}, -2$

59-62 ■ Encuentre una función polinomial del grado especificado que tenga los ceros dados.

59. Grado 3: ceros $-1, 1, 3$

60. Grado 4: ceros $-2, 0, 2, 4$

61. Grado 4: ceros $-1, 1, 3, 5$

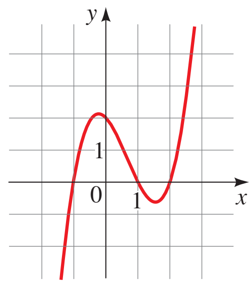
62. Grado 5: ceros $-2, -1, 0, 1, 2$

63. Encuentre una función polinomial de grado 3 que tenga ceros $1, -2$ y 3 y en el que el coeficiente de x^2 sea 3.

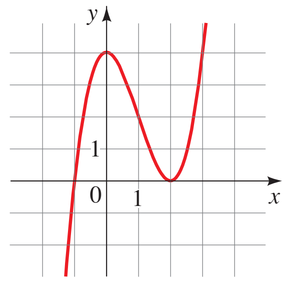
64. Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga coeficientes enteros y ceros $1, -1, 2$ y $\frac{1}{2}$.

65-68 ■ Encuentre la función polinomial del grado especificado cuya gráfica se muestra.

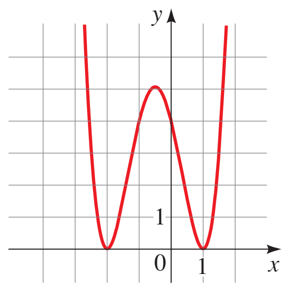
65. Grado 3



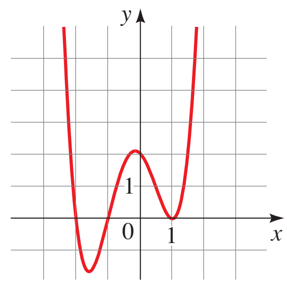
66. Grado 3



67. Grado 4



68. Grado 4



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

69. ¿División imposible? Supongamos que nos piden resolver los siguientes dos problemas en un examen:

A. Encuentre el residuo cuando $6x^{1000} - 17x^{562} + 12x + 26$ se divide entre $x + 1$.

B. ¿$x - 1$ es factor de $x^{567} - 3x^{400} + x^9 + 2$?

Obviamente, es imposible resolver estos problemas al hacer una división, porque los polinomios son de grado muy alto. Use uno o más de los teoremas de esta sección para resolver estos problemas *sin* hacer realmente la división.

70. Forma anidada de una función polinomial Expanda Q para demostrar que las polinomiales P y Q son iguales.

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 5$$
$$Q(x) = (((3x - 5)x + 1)x - 3)x + 5$$

Trate de evaluar $P(2)$ y $Q(2)$ mentalmente, usando las formas dadas. ¿Cuál es más fácil? Ahora escriba la función polinomial $R(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ en forma "anidada", como la polinomial Q. Use la forma anidada para hallar $R(3)$ mentalmente.

¿Ve usted cómo calcular con la forma anidada sigue los mismos pasos aritméticos que calcular el valor de una función polinomial usando división sintética?

3.4 Ceros reales de funciones polinomiales

Ceros racionales de funciones polinomiales ▶ Regla de Descartes de los signos y límites superior e inferior para raíces ▶ Uso de álgebra y calculadoras gratificadoras para resolver ecuaciones con polinomios

El Teorema del Factor nos dice que hallar los ceros de una función polinomial es en realidad lo mismo que factorizarlo en factores lineales. En esta sección estudiamos algunos métodos algebraicos que nos ayudan a hallar los ceros reales de una función polinomial y, por tanto, factorizar el polinomio. Empezamos con los ceros *racionales* de una función polinomial.

▼ Ceros racionales de funciones polinomiales

Para ayudarnos a entender el siguiente teorema, consideremos la función polinomial

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x-3)(x+4) && \text{Forma factorizada} \\ &= x^3 - x^2 - 14x + 24 && \text{Forma expandida} \end{aligned}$$

De la forma factorizada vemos que los ceros de P son 2, 3 y -4. Cuando se expande el polinomio, la constante 24 se obtiene al multiplicar $(-2) \times (-3) \times 4$. Esto significa que los ceros de la función polinomial son todos ellos factores del término constante. Lo siguiente generaliza esta observación.

TEOREMA DE CEROS RACIONALES

Si la función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de P es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0

y q es un factor del coeficiente principal a_n.

DEMOSTRACIÓN Si p/q es un cero racional, en sus términos más sencillos, la función polinomial P, entonces tenemos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{Multiplique por } q^n$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \qquad \text{Reste } a_0q^n \text{ y factorice el lado izquierdo}$$

Ahora p es un factor del lado izquierdo, de modo que también debe ser un factor del lado derecho. Como p/q está en sus términos más sencillos, p y q no tienen factor en común, de modo que p debe ser un factor de a_0. Una demostración similar muestra que q es un factor de a_n. ■

Vemos del Teorema de Ceros Racionales que si el coeficiente principal es 1 o -1, entonces los ceros racionales deben ser factores del término constante.

EJEMPLO 1 Uso del Teorema de Ceros Racionales

Encuentre los ceros racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

Library of Congress

EVARISTE GALOIS (1811-1832) es uno de los muy pocos matemáticos de tener toda una teoría a la que se ha dado nombre en su honor. Murió cuando todavía no cumplía 21 años, pero ya había resuelto por completo el problema central de la teoría de ecuaciones al describir un criterio que revela si una ecuación con polinomios se puede resolver con operaciones algebraicas. Galois fue uno de los más grandes matemáticos de su tiempo, aunque casi no fue conocido. Repetidas veces envió su trabajo a los eminentes matemáticos Cauchy y Poisson, quienes o bien perdieron las cartas o no entendieron sus ideas. Galois escribía en un estilo terso e incluía pocos detalles, lo cual es probable desempeñó un papel para no aprobar los exámenes de admisión de la Ecole Polytechique de París. Político radical, Galois pasó varios meses en prisión por sus actividades revolucionarias. Su corta vida llegó a su fin cuando murió en un duelo por un lío de faldas y, temiendo esto, escribió la esencia de sus ideas y las confió a su amigo Auguste Chevalier. Concluyó escribiendo "habrá, espero, personas que encuentren ventaja en descifrar todo este desorden." El matemático Camille Jordan hizo justamente esto, 14 años después.

SOLUCIÓN Como el coeficiente principal es 1, cualquier cero racional debe ser un divisor del término constante 2. Entonces los ceros racionales posibles son ± 1 y ± 2. Probamos cada una de estas posibilidades.

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^3 - 3(1) + 2 = 0 \\ P(-1) &= (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4 \\ P(2) &= (2)^3 - 3(2) + 2 = 4 \\ P(-2) &= (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0 \end{aligned}$$

Los ceros racionales de P son 1 y -2.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

En el siguiente recuadro se explica cómo usar el Teorema de Ceros Racionales con división sintética para factorizar un polinomio.

HALLAR LOS CEROS RACIONALES DE UN POLINOMIO

1. **Hacer una lista de los ceros posibles.** Haga una lista de todos los ceros racionales posibles, usando el Teorema de Ceros Racionales.
2. **Dividir.** Use división sintética para evaluar la función polinomial de cada uno de los candidatos para los ceros racionales que usted encontró en el Paso 1. Cuando el residuo sea 0, observe el cociente que haya obtenido.
3. **Repetir.** Repita los Pasos 1 y 2 para el cociente. Deténgase cuando obtenga un cociente que sea cuadrático o se factorice con facilidad, y use la fórmula cuadrática o factorice para hallar los ceros restantes.

EJEMPLO 2 | Hallar ceros racionales

Factorice la función polinomial $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$, y encuentre todos sus ceros.

SOLUCIÓN Por el Teorema de Ceros Racionales, los ceros racionales de P son de la forma

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factor de término constante}}{\text{factor de coeficiente principal}}$$

El término constante es 6 y el coeficiente principal es 2, y

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factor de 6}}{\text{factor de 2}}$$

Los factores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ y los factores de 2 son $\pm 1, \pm 2$. Por lo tanto, los posibles ceros racionales de P son

$$\pm\frac{1}{1},\quad \pm\frac{2}{1},\quad \pm\frac{3}{1},\quad \pm\frac{6}{1},\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{2}{2},\quad \pm\frac{3}{2},\quad \pm\frac{6}{2}$$

Simplificando las fracciones y eliminando duplicados, obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales:

$$\pm 1,\quad \pm 2,\quad \pm 3,\quad \pm 6,\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{3}{2}$$

Para comprobar cuál de estos *posibles* ceros en realidad *son* ceros, necesitamos evaluar P en cada uno de estos números. Una forma eficiente de hacerlo es usar división sintética.

Pruebe con 1 como cero

1	2	1	−13	6
		2	3	−10
	2	3	−10	−4

El residuo *no es* 0, por lo que 1 *no es* un cero

Pruebe si 2 es un cero

2	2	1	−13	6
		4	10	−6
	2	5	−3	0

El residuo *es* 0, por lo que 2 *es* un cero

De la última división sintética vemos que 2 es un cero de P y que P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 && \text{Función polinomial dada} \\ &= (x-2)(2x^2 + 5x - 3) && \text{De división sintética} \\ &= (x-2)(2x-1)(x+3) && \text{Factorice } 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

De la forma factorizada vemos que los ceros de P son 2, $\frac{1}{2}$ y -3.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 3 | Uso del Teorema de Ceros Racionales y la Fórmula Cuadrática

Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$.

(a) Encuentre los ceros de P. **(b)** Trace la gráfica de P.

SOLUCIÓN

1	1	−5	−5	23	10
		1	−4	−9	14
	1	−4	−9	14	24

2	1	−5	−5	23	10
		2	−6	−22	2
	1	−3	−11	1	12

5	1	−5	−5	23	10
		5	0	−25	−10
	1	0	−5	−2	0

(a) El coeficiente principal de P es 1, de modo que todos los ceros racionales son enteros: son divisores del término constante 10. Entonces, los posibles candidatos son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10$$

Usando división sintética (vea al margen), encontramos que 1 y 2 no son ceros pero que 5 es un cero y que P se factoriza como

$$x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x-5)(x^3 - 5x - 2)$$

Ahora tratamos de factorizar el cociente $x^3 - 5x - 2$. Sus posibles ceros son los divisores de -2, es decir,

$$\pm 1, \quad \pm 2$$

Como ya sabemos que 1 y 2 no son ceros de la función polinomial original P, no necesitamos probarlos otra vez. Verificando los candidatos restantes, -1 y -2, vemos que -2 es un cero (vea al margen), y P se factoriza como

−2	1	0	−5	−2
		−2	4	2
	1	−2	−1	0

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 &= (x-5)(x^3 - 5x - 2) \\ &= (x-5)(x+2)(x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

A continuación use la fórmula cuadrática para obtener los dos ceros restantes de P:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Los ceros de P son 5, -2, $1 + \sqrt{2}$, y $1 - \sqrt{2}$.

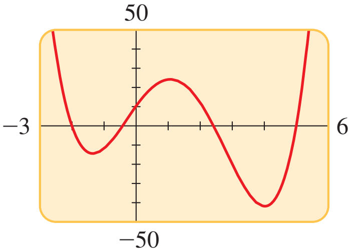


FIGURA 1
$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$

(b) Ahora que conocemos los ceros de P, podemos usar los métodos de la Sección 3.2 para trazar la gráfica. Si deseamos usar una calculadora graficadora, conocer los ceros nos permite escoger un rectángulo de vista apropiado, que sea lo suficiente ancho como para contener todos los puntos de intersección x de P. Las aproximaciones numéricas de los ceros de P son

$$5, \quad -2, \quad 2.4, \quad \text{y} \quad -0.4$$

Por lo tanto, en este caso escogemos el rectángulo $[-3, 6]$ por $[-50, 50]$ y trazamos la gráfica que se ve en la Figura 1.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51**

Regla de Descartes de los signos y límites superior e inferior para raíces

En algunos casos, la regla siguiente descubierta por el filósofo y matemático francés René Descartes hacia 1637 (vea página 181) es útil para eliminar candidatos de listas largas de posibles raíces racionales. Para describir esta regla, necesitamos el concepto de *variación en signo*. Si $P(x)$ es una función polinomial con coeficientes reales, escrito con potencias descendentes de x (y omitiendo potencias con coeficiente 0), entonces una **variación en signo** se presenta siempre que coeficientes adyacentes tengan signos contrarios. Por ejemplo,

$$P(x) = 5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$$

tiene tres variaciones en signos.

Polinomio	Variaciones en signo
$x^2 + 4x + 1$	0
$2x^3 + x - 6$	1
$x^4 - 3x^2 - x + 4$	2

REGLA DE DESCARTES DE SIGNOS

Sea P una función polinomial con coeficientes reales.

1. El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en signo en $P(x)$ o es menor a este último número, en un número entero par.
2. El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en signo en $P(-x)$ o es menor a este último número, en un número entero par.

EJEMPLO 4 | Uso de la Regla de Descartes

Use la Regla de Descartes de los Signos para determinar el número posible de ceros reales positivos y negativos de la función polinomial

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

SOLUCIÓN La polinomial tiene una variación en signo, de modo que tiene un cero positivo. Ahora

$$\begin{aligned} P(-x) &= 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3 \\ &= 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(-x)$ tiene tres variaciones en signo. Entonces, $P(x)$ tiene ya sea tres o un cero negativo, haciendo un total de dos o de cuatro ceros reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

Decimos que a es un **límite inferior** y b es un **límite superior** para los ceros de una función polinomial si todo cero real c de la polinomial satisface $a \le c \le b$. El siguiente teorema nos ayuda a hallar esos límites para los ceros de una función polinomial.

TEOREMA DE LOS LÍMITES SUPERIORES E INFERIORES

Sea P una función polinomial con coeficientes reales.

1. Si dividimos $P(x)$ entre $x - b$ (con $b > 0$) usando división sintética y si el renglón que contiene el cociente y residuo no tiene una entrada negativa, entonces b es un límite superior para los ceros reales de P.
2. Si dividimos $P(x)$ entre $x - a$ (con $a < 0$) usando división sintética y si el renglón que contiene el cociente y residuo tiene entradas que son alternativamente no positivas y no negativas, entonces a es un límite inferior para los ceros reales de P.

Una demostración de este teorema está sugerida en el Ejercicio 97. La frase "alternativamente no positivas y no negativas" simplemente quiere decir que los signos de los números se alternan, con 0 considerado como positivo o negativo según se requiera.

EJEMPLO 5 | Límites superior e inferior para ceros de una función polinomial

Demuestre que todos los ceros reales de la función polinomial $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ se encuentran entre -3 y 2.

SOLUCIÓN Dividimos $P(x)$ entre $x - 2$ y $x + 3$ usando división sintética.

2	1	0	−3	2	−5
		2	4	2	8
	1	2	1	4	3

Todas las entradas positivas

−3	1	0	−3	2	−5
		−3	9	−18	48
	1	−3	6	−16	43

Las entradas se alternan en signo

Por el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores, -3 es un límite inferior y 2 es un límite superior para los ceros. Como ni -3 ni 2 es un cero (los residuos no son 0 en la tabla de división), todos los ceros reales están entre estos números.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

EJEMPLO 6 | Factorizar una función polinomial de quinto grado

Factorice completamente la función polinomial

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

SOLUCIÓN Los posibles ceros racionales de P son $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, $\pm\frac{3}{2}$, ± 3, $\pm\frac{9}{2}$, y ± 9. Verificamos primero los candidatos positivos, empezando con el más pequeño.

$\frac{1}{2}$	2	5	−8	−14	6	9
		1	3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{33}{4}$	$-\frac{9}{8}$
	2	6	−5	$-\frac{33}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{63}{8}$

$\frac{1}{2}$ no es un cero

1	2	5	−8	−14	6	9
		2	7	−1	−15	−9
	2	7	−1	−15	−9	0

$P(1) = 0$

Entonces 1 es un cero, y $P(x) = (x - 1)(2x^4 + 7x^3 - x^2 - 15x - 9)$. Continuamos factorizando el cociente. Todavía tenemos la misma lista de posibles ceros excepto que $\frac{1}{2}$ se ha eliminado.

1	2	7	−1	−15	−9
		2	9	8	−7
	2	9	8	−7	−16

1 no es un cero

$\frac{3}{2}$	2	7	−1	−15	−9
		3	15	21	9
	2	10	14	6	0

$P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, todas las entradas no negativas

Vemos que $\frac{3}{2}$ es un cero y un límite superior para los ceros de $P(x)$, de modo que no necesitamos verificar más por ceros positivos, porque todos los candidatos restantes son mayores a $\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-\tfrac{3}{2})(2x^3+10x^2+14x+6) && \text{Por división sintética} \\ &= (x-1)(2x-3)(x^3+5x^2+7x+3) && \text{Factorice 2 del último factor, multiplique en segundo factor} \end{aligned}$$

Por la Regla de Descartes de los Signos, $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ no tiene cero positivo, de modo que sus únicos ceros racionales posibles son -1 y -3.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ & & -1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array} \qquad P(-1) = 0$$

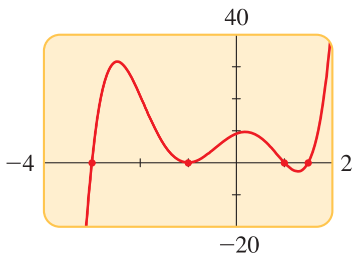


FIGURA 2

$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$
$= (x-1)(2x-3)(x+1)^2(x+3)$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(2x-3)(x+1)(x^2+4x+3) && \text{Por división sintética} \\ &= (x-1)(2x-3)(x+1)^2(x+3) && \text{Factorización cuadrática} \end{aligned}$$

Esto significa que los ceros de P son 1, $\frac{3}{2}$, -1 y -3. La gráfica de la función polinomial se muestra en la Figura 2.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

Uso de álgebra y calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones con polinomios

En la Sección 1.9 utilizamos calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones gráficamente. Ahora podemos usar las técnicas algebraicas que hemos aprendido, para seleccionar un rectángulo de vista apropiado cuando resolvamos gráficamente una ecuación con polinomios.

EJEMPLO 7 | Resolver gráficamente una ecuación de cuarto grado

Encuentre todas las soluciones reales de la siguiente ecuación, redondeadas al décimo más cercano.

$$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$

SOLUCIÓN Para resolver gráficamente la ecuación, graficamos

$$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$$

Usamos el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores para ver dónde pueden hallarse las soluciones.

Primero usamos el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores para hallar dos números entre los cuales deben estar todas las soluciones. Esto nos permite escoger un rectángulo de vista que seguramente contiene todos los puntos de intersección x de P. Usamos división sintética y procedemos por prueba y error.

Para hallar un límite superior, intentamos los números enteros 1, 2, 3, . . . , como candidatos potenciales. Vemos que 2 es un límite superior para las soluciones.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & 4 & -7 & -2 & -3 \\ & & 6 & 20 & 26 & 48 \\ \hline & 3 & 10 & 13 & 24 & 45 \end{array} \qquad \text{Todos positivos}$$

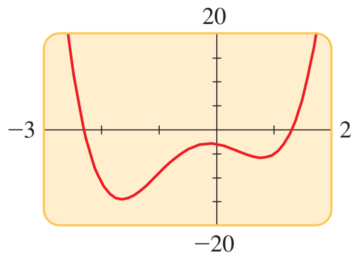


FIGURA 3
$y = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$

Ahora buscamos un límite inferior, intentando con los números -1, -2 y -3 como potenciales candidatos. Vemos que -3 es un límite inferior para las soluciones.

-3	3	4	-7	-2	-3
		-9	15	-24	78
	3	-5	8	-26	75

Las entradas se alternan en signo

Entonces, todas las soluciones se encuentran entre -3 y 2. Por lo tanto, el rectángulo de vista $[-3, 2]$ por $[-20, 20]$ contiene todos los puntos de intersección x de P. La gráfica de la figura 3 tiene dos puntos de intersección x, uno entre -3 y -2 y el otro entre 1 y 2. Si hacemos acercamiento (zoom), encontramos que las soluciones de la ecuación, al décimo más cercano, son -2.3 y 1.3.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **93**

EJEMPLO 8 | Determinar el tamaño de un tanque de combustible

Un tanque de combustible está formado por una sección cilíndrica central de 4 pies de largo y dos secciones hemisféricas de extremo, como se ve en la Figura 4. Si el tanque tiene un volumen de 100 pies^3, ¿cuál es el radio r que se muestra en la figura, redondeado al centésimo de pie más cercano?

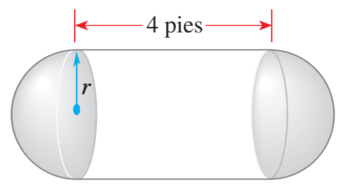


FIGURA 4

SOLUCIÓN Usando la fórmula del volumen al final de este libro, vemos que el volumen de la sección cilíndrica del tanque es

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

$$\pi \cdot r^2 \cdot 4$$

Las dos partes semiesféricas juntas forman una esfera completa cuyo volumen es

Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Como el volumen total del tanque es de 100 pies^3, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 = 100$$

Una solución negativa para r no tendría sentido en esta situación física, y por sustitución podemos verificar que $r = 3$ lleva a un tanque que tiene más de 226 pies^3 de volumen, mucho mayor que el requerido de 100 pies^3. Por lo tanto, sabemos que el radio correcto está entre 0 y 3 pies, de modo que usamos un rectángulo de vista de $[0, 3]$ por $[50, 150]$ para graficar la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$, como se ve en la Figura 5. Como buscamos que el valor de esta función sea 100, también graficamos la recta horizontal $y = 100$ en el mismo rectángulo de vista. El radio correcto será la coordenada x del punto de intersección de la curva y la recta. Usando el cursor y haciendo acercamiento zoom, vemos que en el punto de intersección $x \approx 2.15$, redondeado a dos lugares decimales. Entonces el tanque tiene un radio de aproximadamente 2.15 pies.

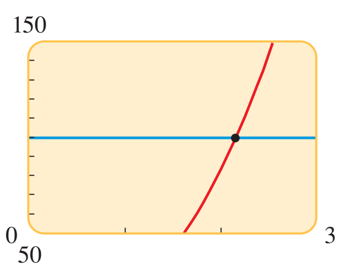


FIGURA 5
$y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$ y $y = 100$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **99**

Observe que podríamos haber resuelto la ecuación del Ejemplo 8 al escribirla primero como

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 - 100 = 0$$

y luego hallar el punto de intersección x de la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 - 100$.

3.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si la función polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes enteros, entonces los únicos números que posiblemente podrían ser ceros racionales de P son todos los de la forma $\frac{p}{q}$, donde p es un factor de _____ y q es un factor de _____. Los posibles ceros racionales de $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 19x - 10$ son __________.

2. Usando la Regla de Descartes de los Signos, podemos decir que la función polinomial $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 8$ tiene ______, _____, o ______ ceros reales positivos y ____ ceros reales negativos.

3. *¿Verdadero o falso?* Si c es un cero real de la polinomial P, entonces todos los otros ceros de P son ceros de $P(x)/(x - c)$.

4. *¿Verdadero o falso?* Si a es un límite superior para los ceros reales de la polinomial P, entonces $-a$ es necesariamente un límite inferior para los ceros reales de P.

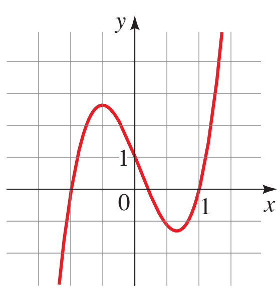
HABILIDADES

5-10 ■ Haga una lista de todos los posibles ceros racionales dados por el Teorema de Ceros Racionales (pero no verifique cuáles son realmente ceros).

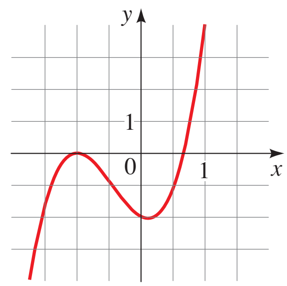
5. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
6. $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 8$
7. $R(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 - 8$
8. $S(x) = 6x^4 - x^2 + 2x + 12$
9. $T(x) = 4x^4 - 2x^2 - 7$
10. $U(x) = 12x^5 + 6x^3 - 2x - 8$

11-14 ■ Nos dan una función polinomial P y su gráfica. **(a)** Haga una lista de todos los posibles ceros racionales de P dados por el Teorema de Ceros Racionales. **(b)** De la gráfica, determine cuáles de los posibles ceros racionales en realidad resultan ser ceros.

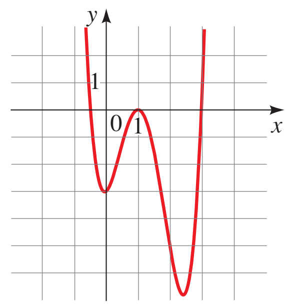
11. $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$



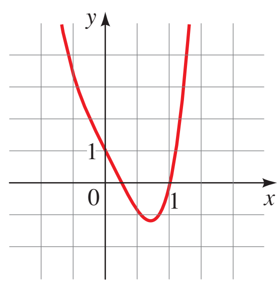
12. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$



13. $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3$



14. $P(x) = 4x^4 - x^3 - 4x + 1$



15-46 ■ Encuentre todos los ceros racionales de la función polinomial, y escriba el polinomio en forma factorizada.

15. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
16. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$
17. $P(x) = x^3 - 3x - 2$
18. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$
19. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
20. $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$
21. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
22. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$
23. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
24. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
25. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
26. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

27. $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

28. $P(x) = x^4 - x^3 - 23x^2 - 3x + 90$

29. $P(x) = 4x^4 - 25x^2 + 36$

30. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$

31. $P(x) = 3x^4 - 10x^3 - 9x^2 + 40x - 12$

32. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

33. $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

34. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

35. $P(x) = 4x^3 - 7x + 3$

36. $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - x - 3$

37. $P(x) = 4x^3 + 8x^2 - 11x - 15$

38. $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$

39. $P(x) = 20x^3 - 8x^2 - 5x + 2$

40. $P(x) = 12x^3 - 20x^2 + x + 3$

41. $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$

42. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$

43. $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 31x^2 + 36$

44. $P(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 4x - 24$

45. $P(x) = 3x^5 - 14x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 43x + 10$

46. $P(x) = 2x^6 - 3x^5 - 13x^4 + 29x^3 - 27x^2 + 32x - 12$

47-56 ■ Encuentre todos los ceros reales de la función polinomial. Use la fórmula cuadrática si es necesario, como en el Ejemplo 3(a).

47. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$

48. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 12$

49. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x + 4$

50. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

51. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 3x - 9$

52. $P(x) = x^5 - 4x^4 - x^3 + 10x^2 + 2x - 4$

53. $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$

54. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 8x - 2$

55. $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 3x - 1$

56. $P(x) = 4x^5 - 18x^4 - 6x^3 + 91x^2 - 60x + 9$

57-64 ■ Nos dan una función polinomial P. **(a)** Encuentre todos los ceros reales de P. **(b)** Trace la gráfica de P.

57. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

58. $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

59. $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$

60. $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 21x - 9$

61. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$

62. $P(x) = -x^4 + 10x^2 + 8x - 8$

63. $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$

64. $P(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3$

65-70 ■ Use la Regla de Descartes de los Signos para determinar cuántos ceros reales positivos y cuántos negativos puede tener la función polinomial. A continuación, determine el posible número total de ceros reales.

65. $P(x) = x^3 - x^2 - x - 3$

66. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$

67. $P(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1$

68. $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$

69. $P(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 + 6x$

70. $P(x) = x^8 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

71-74 ■ Demuestre que los valores dados para a y b son límites inferiores y superiores para los ceros reales de la función polinomial.

71. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2; \quad a = -3, b = 1$

72. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8; \quad a = -3, b = 5$

73. $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - 39x + 9; \quad a = -3, b = 2$

74. $P(x) = 3x^4 - 17x^3 + 24x^2 - 9x + 1; \quad a = 0, b = 6$

75-78 ■ Encuentre enteros que sean límites superiores e inferiores para los ceros reales de la función polinomial.

75. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

76. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$

77. $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 2$

78. $P(x) = x^5 - x^4 + 1$

79-84 ■ Encuentre todos los ceros racionales de la función polinomial, y luego encuentre los ceros irracionales, si los hay. Siempre que sea apropiado, use el Teorema de Ceros Racionales, el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores, la Regla de Descartes de los Signos, la fórmula cuadrática u otras técnicas de factorización.

79. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

80. $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 20x + 4$

81. $P(x) = 4x^4 - 21x^2 + 5$

82. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x$

83. $P(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 23x^2 - 50x + 24$

84. $P(x) = 8x^5 - 14x^4 - 22x^3 + 57x^2 - 35x + 6$

85-88 ■ Demuestre que la función polinomial no tiene ningún cero racional.

85. $P(x) = x^3 - x - 2$

86. $P(x) = 2x^4 - x^3 + x + 2$

87. $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 12$

88. $P(x) = x^{50} - 5x^{25} + x^2 - 1$

89-92 ■ Las soluciones reales de la ecuación dada son racionales. Haga una lista de todas las posibles raíces racionales usando el Teorema de Ceros Racionales, y luego grafique la función polinomial en el rectángulo de vista dado para determinar cuáles valores son soluciones realmente. (Todas las soluciones se puedan ver en el rectángulo de vista.)

89. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0; \quad [-4, 4]$ por $[-15, 15]$

90. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0; \quad [-4, 4]$ por $[-30, 30]$

91. $2x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 5x + 12 = 0$; $[-2, 5]$ por $[-40, 40]$

92. $3x^3 + 8x^2 + 5x + 2 = 0$; $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$

93-96 ■ Use una calculadora graficadora para hallar todas las soluciones reales de la ecuación, redondeada a dos lugares decimales.

93. $x^4 - x - 4 = 0$

94. $2x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0$

95. $4.00x^4 + 4.00x^3 - 10.96x^2 - 5.88x + 9.09 = 0$

96. $x^5 + 2.00x^4 + 0.96x^3 + 5.00x^2 + 10.00x + 4.80 = 0$

97. Sea $P(x)$ una función polinomial con coeficientes reales y sea $b > 0$. Use el Algoritmo de División para escribir

$$P(x) = (x - b) \cdot Q(x) + r$$

Suponga que $r \geq 0$ y que todos los coeficientes en $Q(x)$ son no negativos. Sea $z > b$.

(a) Demuestre que $P(z) > 0$.

(b) Demuestre la primera parte del Teorema de los Límites Superiores e Inferiores.

(c) Use la primera parte del Teorema de los Límites Superiores e Inferiores para demostrar la segunda parte. [*Sugerencia:* Demuestre que si $P(x)$ satisface la segunda parte del teorema, entonces $P(-x)$ satisface la primera parte.]

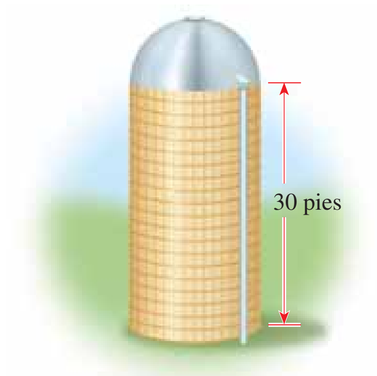
98. Demuestre que la ecuación

$$x^5 - x^4 - x^3 - 5x^2 - 12x - 6 = 0$$

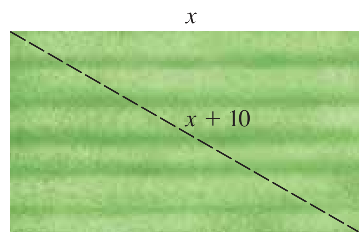
tiene exactamente una raíz racional, y luego demuestre que debe tener ya sea dos o cuatro raíces racionales.

APLICACIONES

99. Volumen de un silo Un silo para granos está formado por una sección principal cilíndrica y un techo semiesférico. Si el volumen total del silo (incluyendo la parte dentro de la sección del techo) es de 15,000 pies^3 y la parte cilíndrica es de 30 pies de altura, ¿cuál es el radio del silo, redondeado al décimo de pie más cercano?



100. Dimensiones de un lote Una parcela rectangular de tierra tiene un área de 5000 pies^2. Una diagonal entre esquinas opuestas se mide y resulta ser 10 pies más larga que un lado de la parcela. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno, redondeadas al pie más cercano?



101. Profundidad de una nevada Empezó a caer nieve al mediodía de un domingo. La cantidad de nieve en el suelo en cierto lugar en el tiempo t está dada por la función

$$h(t) = 11.60t - 12.41t^2 + 6.20t^3 - 1.58t^4 + 0.20t^5 - 0.01t^6$$

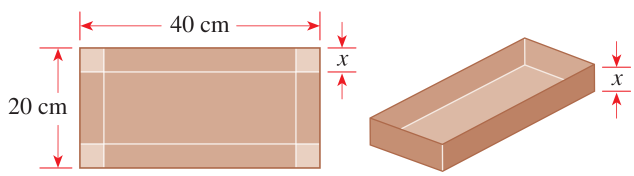
donde t se mide en días desde el comienzo de la nevada y $h(t)$ es la profundidad de la nieve en pulgadas. Trace una gráfica de esta función y use su gráfica para contestar las siguientes preguntas.

(a) ¿Qué ocurrió poco después del mediodía del martes?

(b) ¿Hubo más de 5 pulgadas de nieve en el suelo? Si es así, ¿en qué día(s)?

(c) ¿En qué día y a qué hora (a la hora más cercana) desapareció por completo la nieve?

102. Volumen de una caja Una caja abierta con volumen de 1500 cm^3 ha de construirse tomando una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados de lado de longitud x cm de cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Demuestre que esto puede hacerse en dos formas diferentes, y encuentre las dimensiones exactas de la caja en cada caso.



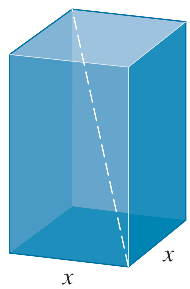
103. Volumen de un cohete Un cohete está formado por un cilindro circular recto de 20 m de altura, rematado por un cono cuya altura y diámetro son iguales y cuyo radio es igual que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser este radio (redondeado a dos lugares decimales) si el volumen total debe ser de $500\pi/3$ m^3?

104. Volumen de una caja Una caja rectangular con volumen de $2\sqrt{2}$ pies^3 tiene una base cuadrada, como se ilustra en la figura siguiente. La diagonal de la caja (entre un par de esquinas opuestas) es 1 pie más larga que cada lado de la base.

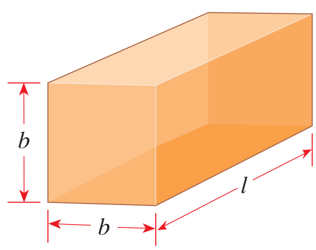
(a) Si la caja tiene lados de longitud de x pies, demuestre que

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 8 = 0$$

(b) Demuestre que dos cajas diferentes satisfacen las condiciones dadas. Encuentre las dimensiones en cada caso, redondeadas al centésimo de pie más cercano.



105. Dimensiones alrededor de una caja Una caja con base cuadrada tiene longitud más dimensiones a su alrededor de 108 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la caja si su volumen es de 2200 pulg.^{3}?



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

106. ¿Cuántos ceros reales puede tener una función polinomial? Dé ejemplos polinomiales que tengan las siguientes propiedades, o explique por qué es imposible hallar ese polinomio.

(a) Una polinomial de grado 3 que no tiene ceros reales
(b) Una polinomial de grado 4 que no tiene ceros reales
(c) Una polinomial de grado 3 que no tiene tres ceros reales, sólo uno de los cuales es racional
(d) Una polinomial de grado 3 que no tiene cuatro ceros reales, ninguno de los cuales es racional.

¿Qué debe ser verdadero acerca del grado de una polinomial con coeficientes enteros si no tiene ceros reales?

107. La cúbica deprimida La ecuación cúbica más general (tercer grado) con coeficientes racionales se puede escribir como

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

(a) Demuestre que si sustituimos x por $X - a/3$ y simplificamos, terminamos con una ecuación que no tiene término en X^2, es decir, una ecuación de la forma

$$X^3 + pX + q = 0$$

A esto se llama *cúbica deprimida*, porque hemos "deprimido" el término cuadrático.

(b) Use el procedimiento descrito en la parte (a) para deprimir la ecuación $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$.

108. La fórmula cúbica La fórmula cuadrática se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática (o de segundo grado). El estudiante puede preguntarse si existen esas fórmulas para ecuaciones cúbicas (de tercer grado), cuárticas (de cuarto grado) y de grado superior. Para la cúbica deprimida $x^3 + px + q = 0$, Cardano (página 274) encontró la siguiente fórmula para una solución:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Una fórmula para ecuaciones cuárticas (de cuarto grado) fue descubierta por el matemático italiano Ferrari en 1540. En 1824, el matemático noruego Niels Henrik Abel demostró que es imposible escribir una fórmula quíntica, es decir, una fórmula para ecuaciones de quinto grado. Finalmente, Galois (página 254) dio un criterio para determinar cuáles ecuaciones se pueden resolver mediante una fórmula que contenga radicales.

Utilice la fórmula cúbica para hallar una solución para las siguientes ecuaciones. A continuación resuelva las ecuaciones usando los métodos que aprendió en esta sección. ¿Cuál método es más fácil?

(a) $x^3 - 3x + 2 = 0$
(b) $x^3 - 27x - 54 = 0$
(c) $x^3 + 3x + 4 = 0$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Apuntando hacia un cero**

En este proyecto exploramos un método numérico para aproximar los ceros de una función polinomial. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**