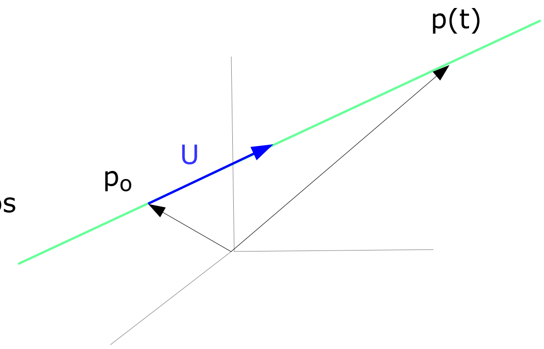
Rectas y planos en el espacio

Los puntos de cualquier recta en el espacio son de la forma $p(t)=p_o+tU$ donde p_o es punto de la recta y U es un vector en la recta.



Esta es una *parametrización* de la recta (todos los puntos están en función del parámetro t). Cada recta tiene una infinidad de parametrizaciones, ya que podemos empezar en cualquier punto de la recta y usar cualquier vector en la dirección de la recta.

Ejemplo. La recta que pasa por (1,4,2) y (3,0,5) tiene la dirección del vector (3,0,5)-(1,4,2)= (2,-4,3) así que puede parametrizarse como $P(t) = (1,4,2) + t\,(2,-4,3) = (2t+1,-4t+4,3t+2)$

Para hallar otros puntos en la recta basta darle distintos valores al parámetro, como $p(2) = (-1,16,-7)$

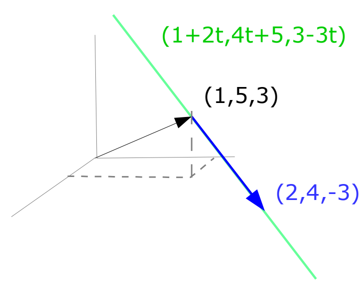
$p(-1) = (5,-8,11)$

¿Como sabemos si un punto como (-3,12,-4) está o no está en la recta? Hay que ver si hay algún valor del parámetro da ese punto. $(-3,12,-4) = (2t+1,-4t+4,3t+2)$ cuando t=-2 así que este punto sí está.

Otra parametrización de la misma recta es $P(s) = (3,0,5) + s\,(-4,8,-6) = (-2s+3,8s,-6s+5)$

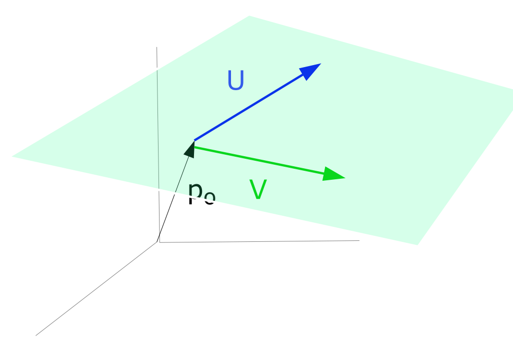
Ejemplo.

Los puntos de la forma (1+2t,4t+5,3-3t) forman una recta que pasa por el punto (1,5,3) y tiene la dirección del vector (2,4,-3).



Los puntos de un plano en el espacio son de la forma $p(t) = p_o+tU+sV$ donde p_o es un punto del plano y U y V son dos vectores no paralelos en el plano.

Cada plano tiene una infinidad de parametrizaciones, ya que podemos tomar a cualquier punto del plano y a cualquier par de vectores no paralelos.



Ejemplo.

- Para hallar una parametrización del plano que pasa por (1,0,0) y (0,2,0) y (0,0,3) necesitamos dos vectores no paralelos en el plano. Podemos tomar (0,2,0)-(1,0,0) = (-1,2,0) y (0,0,3)-(1,0,0) = (-1,0,3) y la parametrización es P(s,t) = (1,0,0) + s (-1,2,0) + t (-1,0,3) = **(1-s-t,2s,3t)**

  Otra parametrización del plano es Q(u,v) = (0,2,0) + u (1,0,-3) + v (0,-2,3) = (u,2-2v,-3u+3v)

- ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano? Los puntos p(s,t)=(1-s-t,2s,3t) tienen coordenadas

  x= 1-s-t → x = 1 − y/2 − z/3 → **6x +3y + 2z = 6**

  y= 2s → s = y/2

  z = 3t → t = z/3

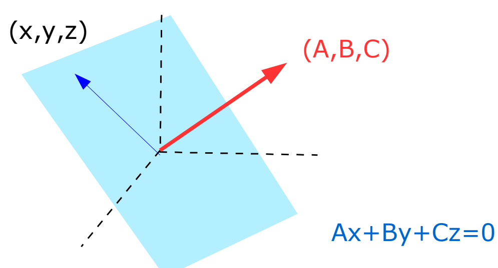
- ¿Como podemos saber si un punto como (0,-2,6) esta en el plano? Podemos ver si existen s y t tales que P(s,t)=(1-s-t,2s,3t)=(0,-2,6), para esto debe ocurrir que 0=1-s-t -2=2s 6=3t de donde s=-1 y t=2 y se comprueba que P(-1,2) = (1-(-1)-(2),2(-1),3(2)) = (0,-2,3), asi que sí está.

  Pero es mas sencillo es ver si (0,-2,6) cumple o no la ecuación 6x +3y + 2z = 6.
  Como 6(0) +3(-2) + 2(6) = 6 la ecuación se cumple y el punto sí esta en el plano.

Lema. Las soluciones de cada ecuación lineal Ax+By+Cz+D=0 forman un plano. Cada plano en el espacio esta formado por las soluciones de una ecuación lineal.

Demostración.

Si D= O, la ecuación Ax+By+Cz = 0 puede escribirse como (A,B,C)·(x,y,z)=0 , así que sus soluciones corresponden a los vectores (x,y,z) que son perpendiculares a (A,B,C) y estos vectores forman un plano.

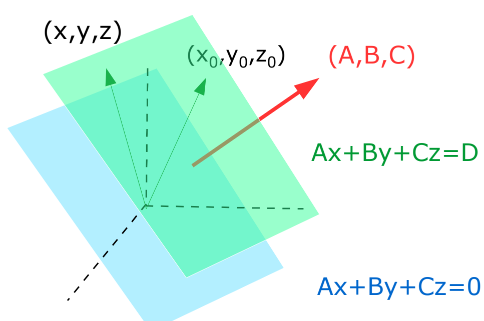


Consideremos ahora la ecuación Ax+By+Cz = D con D≠0.

Si (x_0,y_0,z_0) es una solución de la ecuación, es decir si $Ax_0+By_0+Cz_0 = D$ entonces para cualquier otra solución (x,y,z)

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$

En este caso ya sabemos que los vectores $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ forman un plano, y los puntos (x,y,z) se obtienen sumandoles el vector fijo (x_0,y_0,z_0).



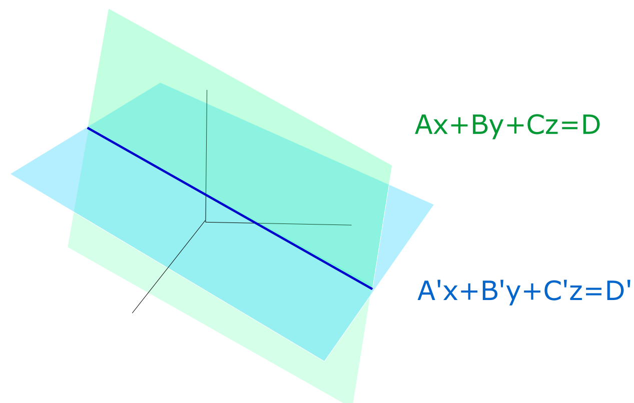
Así que las soluciones de Ax+By+Cz = D forman un plano paralelo a Ax+By+Cz = 0. •

Ejemplos.

- Las soluciones de la ecuación x+2y+3z=0 forman un plano perpendicular al vector (1,2,3) que pasa por el origen.
- Las soluciones de la ecuación x+2y+3z=4 forman un plano perpendicular al vector (1,2,3) que pasa por (4,0,0) y también por (0,2,0) y por (1,0,1).
- ¿Que ecuación cartesiana tiene el plano que pasa por los puntos (1,3,2), (4,5,6) y (5,4,3)? Un punto del plano es (1,3,2). Dos vectores del plano son (4,5,6)-(1,3,2) = (3,2,4) y (5,4,3)-(1,3,2) =(4,1,1). Un vector normal al plano es (3,2,4)x(4,1,1) = (-2,13,-5) así que la ecuación del plano es de la forma -2x+13y-5z=D y como -2(1)+13(3)-5(2)=27 la ecuación es **-2x+13y-5z=27**

Si las ecuaciones lineales en el espacio corresponden a planos, entonces ¿como son las ecuaciones de las rectas? Como cada recta esta contenida en muchos planos, sus puntos deben satisfacer las ecuaciones de cada uno de esos planos.

Como cada recta es la intersección de dos planos, bastan dos ecuaciones lineales para determinarla.



Ejemplos.

- La recta (t+1,2t+4,-3t+2) satisface varias ecuaciones simultáneamente: por ejemplo 2x-y=-2, 3x +z=5, 3y+2z=16, x+y+z=7. Cualesquiera dos de estas ecuaciones determinan a la recta.
- ¿Que sistema de ecuaciones satisface la recta que pasa por (1,2,3) y (6,5,4)? La recta tiene la dirección del vector (5,3,1), y este vector debe ser perpendicular a los vectores normales a los planos que la contienen. Si tomamos dos vectores perpendiculares, por ejemplo (1,-1,-2) y (-1,2,1), obtenemos dos planos que pasan por (1,2,3): **x – y - 2z = -7** , **-x + 2y + z = 6** y los puntos de la recta cumplen las dos ecuaciones.

Intersecciones de rectas y planos en el espacio.

Si elegimos al azar 2 rectas en el espacio lo mas probable es que no se intersecten: solo pueden intersectarse si algún plano las contiene a ambas. Si elegimos al azar 2 planos es muy probable que si se intersecten: lo hacen a menos que sean paralelos. Y si elegimos un plano y una recta al azar lo mas probable es que si intersecten: lo hacen a menos que la dirección de la recta sea una dirección en el plano.

Ejemplo.

¿La recta que pasa por los puntos (1,2,3) y (2,0,5) intersecta al plano 3x+2y+z=4?

La recta tiene dirección (1,-2,2) que no es una dirección del plano porque no es perpendicular al vector normal (3,2,1), así que la recta debe intersectar al plano en un punto.

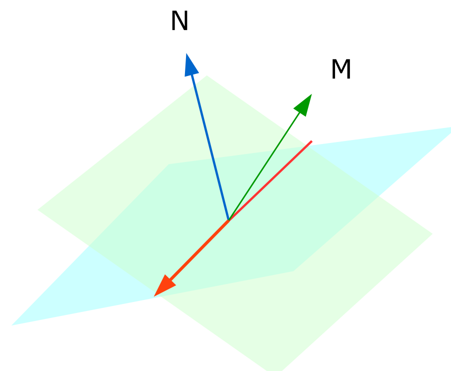
¿En que punto intersecta la recta al plano?

La recta tiene parametrización p(t) = (1,2,3)+t(1,-2,2) = (t+1,-2t+2,2t+3)

El punto de intersección es un punto p(t) que cumple la ecuación del plano 3x+2y+z=4, es decir

3(t+1)+2(-2t+2)+(2t+3)=4 esto ocurres si t=-6 y el punto de intersección es p(-6)=(-5,14,-9).

Lema. Dos planos no paralelos se intersectan en una recta en la dirección perpendicular a sus vectores normales.



Demostración. Como la recta de intersección está en los dos planos entonces debe ser perpendicular a los vectores normales M y N, la única dirección normal es la de MxN. •

Ejemplo. Dar una parametrización de la recta de intersección de los planos x+2y-3z=4 y 3x-y+4z=2.

La recta es perpendicular a los dos vectores normales a los planos, que son (1,2,-3) y (3,-1,4) así que debe tener la dirección del vector (1,2,-3) x (3,-1,4) = (5,-13,-7).

También necesitamos algún punto de la recta, que es una solución del sistema de ecuaciones

x+2y-3z=4

3x-y+4z=2

Si fijamos una coordenada (digamos z=0) podemos resolver para las otras dos: x+2y=4 y 3x-y=2, de donde 7x=8, 7y=10 así que un punto de la recta es $(^8/_7,^{10}/_7,0)$ y una parametrización de la recta es **$p(t) = (^8/_7,^{10}/_7,0) + t\,(5,-13,-7)$**. Podemos checar que esta recta está contenida en los dos planos viendo que sus puntos cumplen las 2 ecuaciones.

Problemas.

1. Da una parametrización de la recta que pasa por (4,1,2) y (1,-2,3) y dí que ecuaciones cartesianas cumple. ¿En que puntos cruza la recta a los planos xy, yz, xz?
2. Da una parametrización para el plano que pasa por los puntos (9,5,2), (1,7,3) y (6,4,8) y dí que ecuación cartesiana cumple. ¿En que puntos intersecta el plano a los ejes x, y, z?
3. Dibuja la recta $p(t)=(2t,-3t,4t)$ y el plano $2x - 3y + 4z = 12$.
4. Da una parametrización de la recta de intersección de los planos

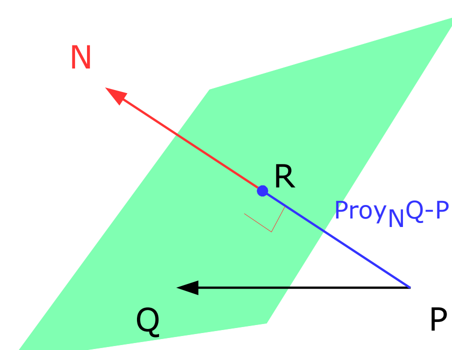
   $x + 2y - z = 3$ y $4x - y + 3z = 1$
5. Da las ecuaciones cartesianas de 4 planos distintos que contengan a la recta $p(t)=(t+2,3t+4,5t+6)$.
6. Da las parametrizaciones de 2 rectas perpendiculares en el plano $x+2y+3z=4$
7. ¿Como son las ecuaciones de todos los planos que son perpendiculares a los dos planos $x+2y+3z=4$ y $5x-6y+7z=-8$?
8. Desde el punto (3,4,9) se lanza una pelota con dirección (1,-2,-3), que se mueve a velocidad constante en linea recta y rebota cada vez que toca alguno de los planos coordenados xy, xz y yz. Da una parametrización del movimiento de la pelota (hay que darla por intervalos).

Distancias y ángulos entre rectas y planos.

La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia de P a algún punto del plano.

Si Q es cualquier punto del plano entonces la proyección del vector Q-P en la dirección del vector N normal al plano es un vector que va de P al plano, y que es mas corto o igual que Q-P. Por lo tanto

$$\text{Distancia} = |\text{Proy}_N Q-P|$$



El punto R del plano que esta mas cerca de P es $R = P + \text{Proy}_N Q-P$.

Ejemplos.

- ¿Cual es la distancia del punto $P=(1,4,2)$ al plano $3x+2y-z=4$?

  Un punto del plano es $Q=(1,1,1)$ y un vector normal al plano es $N=(3,2,-1)$

  Distancia= $|\ \mathrm{Proy}_N Q-P\ | = |\ \mathrm{Proy}_{(3,2,-1)}(1-1,1-4,1-2)\ | = |(0,-3,-1)\cdot(3,2,-1)|/|(3,2,-1)| =$

  $= |0-6+1|/\sqrt{3^2+2^2+1^2} = 5/\sqrt{14}$

- ¿Cual es el punto del plano $3x+2y-z=4$ mas cercano a $(1,4,2)$?

  Un punto del plano es $Q=(1,1,1)$ y el vector $N=(3,2,-1)$ es normal al plano. El punto mas cercano es

  $R = P + \mathrm{Proy}_N Q-P = (1,4,2) + \mathrm{Proy}_{(3,2,-1)}(0,-3,-1) = (1,4,2) - {}^{(3,2,-1)\cdot(0,-3,-1)}/_{(3,2,-1)\cdot(3,2,-1)}\ (3,2,-1)$

  $= (1,4,2) - {}^{5}/_{14}\ (3,2,-1)$ $R = ({}^{-1}/_{14}, {}^{46}/_{14}, {}^{33}/_{14})$

- Otra manera de obtener el punto mas cercano: La recta perpendicular al plano que pasa por P tiene parametrizacion $P(t) = P + tN = (1,4,2) + t\,(3,2,-1) = (3t+1,2t+4,-t+2)$

  El punto donde la recta cruza al plano se encuentra donde cumple la ecuación $3x+2y-y=4$, es decir donde $3(3t+1)+2(2t+4)-1(-t+2)=4$, o sea $9t+3+4t+8+t-2=4$, $14t=-5$, $t=-{}^{5}/_{14}$ que da el punto $P(-{}^{5}/_{14}) = (3(-{}^{5}/_{14})+1,2(-{}^{5}/_{14})+4,-(-{}^{5}/_{14})+2) = ({}^{-1}/_{14}, {}^{46}/_{14}, {}^{33}/_{14})$.

El resultado anterior implica que la distancia del punto (x_0,y_0,z_0) al plano $Ax+By+Cz+D = 0$ es

$|\mathrm{Proy}_{(A,B,C)}(x_0-x,\ y_0-y,\ z_0-z)| = |(x_0-x,\ y_0-y,\ z_0-z)\cdot(A,B,C)|\ /|(A,B,C)| = |Ax_0+By_0+C_0-Ax-By-Cz|/|(A,B,C)|$

$= |Ax_0+By_0+C_0+D|\ /\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}$

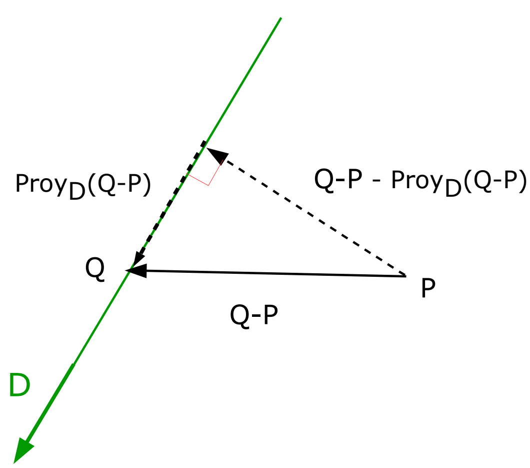
Ejemplo. La distancia del punto $(1,4,2)$ al plano $3x+2y-z=4$ es $|3(1)+2(4)-1(2)-4|\ /\ \sqrt{3^2+2^2+4^2} = 5/\sqrt{14}$

La distancia de un punto P a una recta es la distancia mínima de P al punto R de la recta que esta mas cerca de P. Si la recta tiene dirección D y Q es cualquier punto de la recta, entonces el vector

$V = (Q-P) - \mathrm{Proy}_D(Q-P)$ es perpendicular a la recta y por lo tanto da la distancia mas corta de P a la recta.

El punto de la recta mas cercano a P es

$P+V = Q - \mathrm{Proy}_D(Q-P)$



Ejemplos.

- ¿Cual es la distancia de la recta $p(t)=(1+2t,3-t,5+4t)$ al punto $P=(3,4,2)$?

  Un punto de la recta es $Q=(1,3,5)$ y la dirección de la recta es $(2,-1,4)$.

  Un vector que va de P a la recta es $(1,3,5)-(3,4,2) = (-2,-1,3)$.

  $\mathrm{Proy}_{(2,-1,4)}(-2,-1,3) = {}^{(-2,-1,3)\cdot(2,-1,4)}/_{(2,-1,4)\cdot(2,-1,4)}\ (2,-1,4) = {}^{9}/_{21}\ (2,-1,4) = ({}^{6}/_{7},{}^{-3}/_{7},{}^{12}/_{7})$

  El vector que va de P a la recta y es perpendicular a la recta es

  $V = (-2,-1,3) - \mathrm{Proy}_{(2,-1,4)}(-2,-1,3) = (-2,-1,3) - ({}^{6}/_{7},{}^{-3}/_{7},{}^{12}/_{7}) = ({}^{-20}/_{7},{}^{-4}/_{7},{}^{9}/_{7})$.

  La distancia de $(3,4,2)$ a la recta es $|V| = |({}^{-20}/_{7},{}^{-4}/_{7},{}^{9}/_{7})| = {}^{\sqrt{497}}/_{7}$

  y el punto mas cercano es $(3,4,2) + ({}^{-20}/_{7},{}^{-4}/_{7},{}^{9}/_{7}) = ({}^{1}/_{7},{}^{24}/_{7},{}^{23}/_{7})$

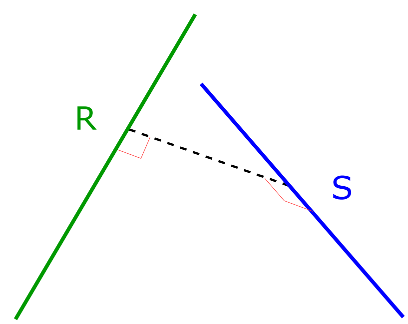
- Otra manera de hallar el punto mas cercano: En ese punto la diferencia $p(t)-(3,4,2)$ es perpendicular al vector de dirección de la recta, que es $(2,-1,4)$:

  $(p(t)-(3,4,2)) \cdot (2,-1,4) = (-2+2t,-1-t,3+4t)\cdot(2,-1,4) = -4+4t+1+t+12+16t = 21t+9 = 0, \quad t=-{}^{3}/_{7}$

  $p({}^{11}/_{21}) = (1+2(-{}^{3}/_{7}),\ 3-(-{}^{3}/_{7}),\ 5+4(-{}^{3}/_{7})) = ({}^{1}/_{7},\ {}^{24}/_{7},\ {}^{23}/_{7})$

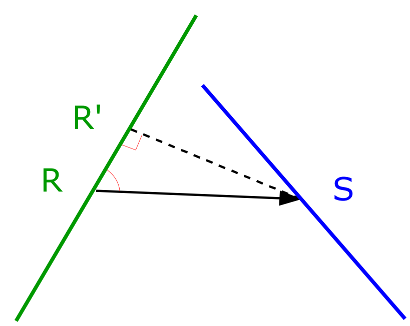
La **distancia** entre dos rectas es la distancia mínima entre dos puntos en esas rectas.

Lema. Si R y S son los puntos mas cercanos de dos rectas entonces R-S es perpendicular a las dos rectas.



Demostración. Si R-S no fuera perpendicular al vector D que da la dirección de la recta por R, entonces $R' = R + \mathrm{Proy}_D(S-R)$ seria un punto en esa recta mas cercano S.

Un argumento similar muestra lo mismo para la otra recta. •



OJO: El argumento anterior muestra que 2 puntos ene las rectas que estén a distancia mínima deben estar en una recta perpendicular a ambas rectas, pero no demuestra que tal recta exista.

Ejemplo. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de las rectas p(t)=(t+1,2t-2,-t) y q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)?

El vector que une los puntos p(t) y q(s) es p(t)-q(s) = (t-2s+4,2t+s-7,-t-3s-2). Cuando p(t) esta mas cerca de q(s) el vector p(t)-q(s) debe ser perpendicular a los vectores de dirección de las rectas, que son (1,2,-1) y (2,-1,3), así que el producto punto de p(t)-q(s) con (1,2,-1) y con (2,-1,3) debe ser 0:

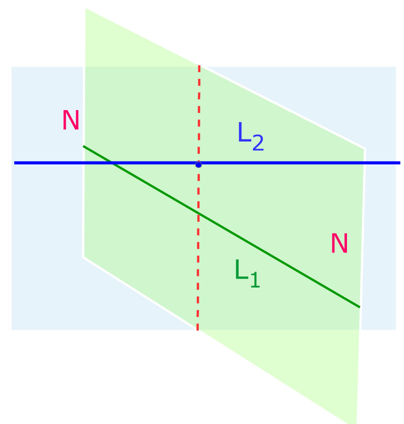
0 = (t-2s+4, 2t+s-6, -t-3s-2) · (1,2,-1) = t-2s+4 +4t+2s-12 +t+3s+2 = 6t+3s-6

0 = (t-2s+4, 2t+s-6, -t-3s-2) · (2,-1,3) = 2t-4s+8 -2t-s+6 -3t-9s-6 = -3t-14s+8

Podemos resolver el sistema de ecuaciones para hallar s = 2/5 t = 4/5

Así que los puntos mas cercanos son p(4/5)=(9/5,-2/5,-4/5) y q(2/5)=(-11/5,14/5,16/5).

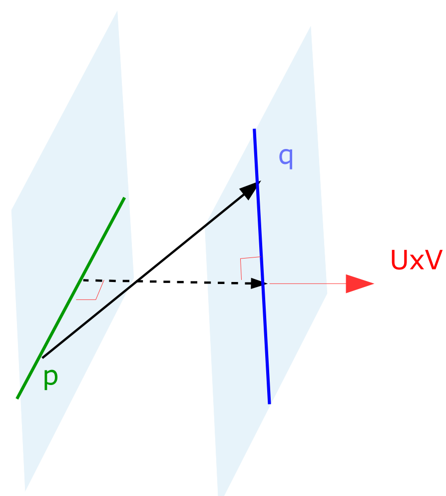
Lema. Para cada par de rectas no paralelas en el espacio, hay una única recta que las intersecta y es perpendicular a ambas.



Demostración. Dadas dos direcciones distintas en el espacio, solo existe una dirección perpendicular a ambas. Si L_1 y L_2 son dos rectas no paralelas y N es un vector perpendicular a ambas, entonces los 2 planos que contienen a una de ellas y al vector N se intersectan en una recta, que las cruza perpendicularmente.

•

Lema. La distancia entre dos rectas que pasan por los puntos p y q con direcciones U y V es $|Proy_{UxV}(p-q)|$



Demostración. La distancia es la norma de la proyección del vector p-q en la dirección normal a las dos rectas, es decir $|Proy_{UxV}(p-q)|$. •

Ejemplos.

- ¿Cual es la distancia entre las rectas p(t) = (2t+1, t+4, -t+2) y q(s) = (-s+2, 3s-1, 2s)?

  P = (1,4,2) q = (2,-1,0) U = (2,1,-1) V = (-1,3,2) UxV = (5,-3,7)

  Distancia = $|Proy_{UxV}(p-q)|$ = $|(5,-3,7)\cdot(-1,5,2)| / |(5,3,-7)| = |-5\ 15+14| / \sqrt{5^2+3^2+7^2} = 6 / \sqrt{83}$

- Hallar los puntos mas cercanos de las rectas $p(t)=(t+1,2t-2,-t)$ y $q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)$?

  El vector de $p(t)$ a $q(s)$ es $p(t)-q(s) = (t-2s+4,2t+s-7,-t-3s-2)$.

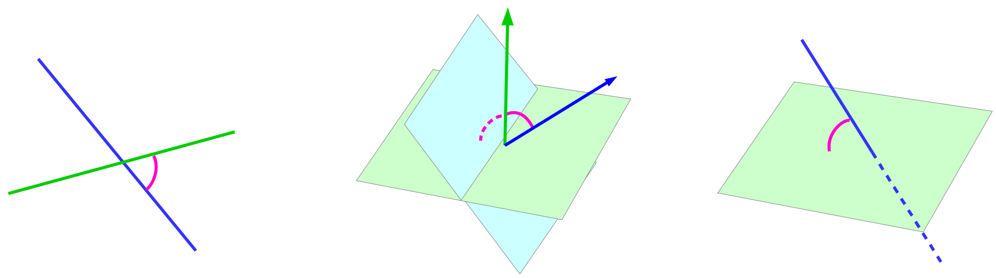
  Los puntos mas cercanos están donde el vector $p(t)-q(s)$ es perpendicular a los vectores de dirección de las rectas $(1,2,-1)$ y $(2,-1,3)$. Esto ocurre cuando los productos punto son 0:

  $(t-2s+4,2t+s-6,-t-3s-2)\cdot(1,2,-1) = t-2s+4+4t+2s-12+t+3s+2 = 6t+3s-6 = 0$
  $(t-2s+4,2t+s-6,-t-3s-2)\cdot(2,-1,3) = 2t-4s+8-2t-s+6-3t-9s-6 = -3t-14s+8 = 0$

  Podemos resolver el sistema de ecuaciones para hallar $t = {}^{4}/_{5}$ $s = {}^{2}/_{5}$

  Así que los puntos mas cercanos son $p({}^{4}/_{5})=({}^{9}/_{5},{}^{-2}/_{5},{}^{-4}/_{5})$ y $q({}^{2}/_{5})=({}^{-11}/_{5},{}^{14}/_{5},{}^{16}/_{5})$.

¿Como podemos calcular los ángulos formados por rectas y planos que se intersectan?



En el caso de 2 rectas o 2 planos, podemos medir dos ángulos, que son suplementarios.

Los ángulos entre 2 rectas son los ángulos entre los vectores de dirección de las rectas. Los ángulos entre 2 planos son los ángulos entre vectores normales a los planos. El ángulo entre una recta y un plano es el complemento del ángulo entre un vector de dirección de la recta y un vector normal al plano.

Ejemplos.

- El ángulo de intersección entre los planos $x+2y+3z=4$ y $5x+5y+7z=8$ es el ángulo entre los vectores normales $M=(1,2,3)$ y $N=(5,6,7)$ que es$\arccos(M\cdot N/|M||N|) = \arccos({}^{38}/_{\sqrt{14}\sqrt{110}}) \approx \arccos(0.9386) \approx 14.46°$

- El ángulo de intersección entre el plano $x+2y+3z=4$ y la recta $p(t)=(3+t,2-t,1+t)$ es el complemento del ángulo entre el vector normal $N=(1,2,3)$ y el vector de dirección $D=(1,-1,1)$ que es

  $\arccos(M\cdot N/|M||N|) = \arccos({}^{2}/_{\sqrt{14}\sqrt{3}}) \approx \arccos(0.1543) \approx 81.12°$ asi que el ángulo es 18.88°

Problemas

9. ¿Cual es el punto del plano P(s,t)=(s+t+1, 2s+3,3t-4) mas cercano al origen?

10. ¿Cual es la distancia del plano 2x - 3y + 4z = 12 al punto (1,3,7)?

11. ¿Cual es la distancia del punto (1,2,3) a la recta p(t)=(t+2,3t+4,5t+6)?
¿Cual es el punto de la recta mas cercano a (1,2,3)?

12. Encuentra la distancia de la recta {(x,y,z) / x + 2y − z = 3 y 4x − y + 3z = 1} al origen.

13. ¿En que punto intersecta la recta p(t)=(1+3t,6-4t,5+2t) al plano x + 2y + 3z = 4 ?
¿Con que ángulo se cruzan?

14. a. ¿Con que ángulo se cruzan los planos 3x - 2y + 4z = 1 y x + 5y - z = 4 ?
b. ¿En que dirección se intersectan?

15. a. ¿Cual es la distancia entre las rectas p(t)=(3t-1, t+2,-4t+6) y q(s)=(2s+4, 6s-7, 3s)?
b. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de estas rectas?
c. Da una parametrización de la recta que intersecta y es perpendicular ambas rectas.

16. Un pato vuela en linea recta y a velocidad constante de modo que en t=0 esta en el punto (3,5,7) y en t=1 esta en (4,3,6). El Sol brilla en lo alto.

a. ¿Cual es la posición del pato en el tiempo t? ¿Y la posición de su sombra en el plano xy?

b. ¿Cual es la velocidad del pato y la velocidad de su sombra?

c. ¿En t=2 el pato se esta acercando o alejando del punto (1,2,3)? ¿Y su sombra?

d. ¿En que momento es que el pato pasa mas cerca del origen? ¿Y su sombra?

17. Las trayectorias en líneas rectas de dos aviones están parametrizadas por

P(t) = (-3t+1,-t-2,4t) y por Q(t) = (2t+8,-3t+10,t-4)

a. ¿Cual es la distancia mínima entre los aviones?

b. ¿Cual es la distancia mínima entre las trayectorias de los aviones?

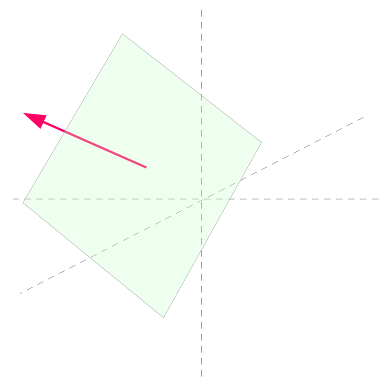
Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales son importantes en el álgebra y tienen muchas otras aplicaciones. La geometría da una manera de entender y visualizar sus soluciones. La siguiente discusión aplica a ecuaciones en 3 variables, pero puede generalizarse fácilmente a cualquier número de dimensiones.

Para cada ecuación lineal:

$Ax+By+Cz=D$

sus soluciones forman un plano en R^3 que es perpendicular al vector (A,B,C). En particular, hay siempre una infinidad de soluciones y estas tienen 2 grados de libertad (ya que el plano tiene 2 dimensiones). Además sabemos que dos ecuaciones tales que una no sea un múltiplo de la otra tienen distintas soluciones.

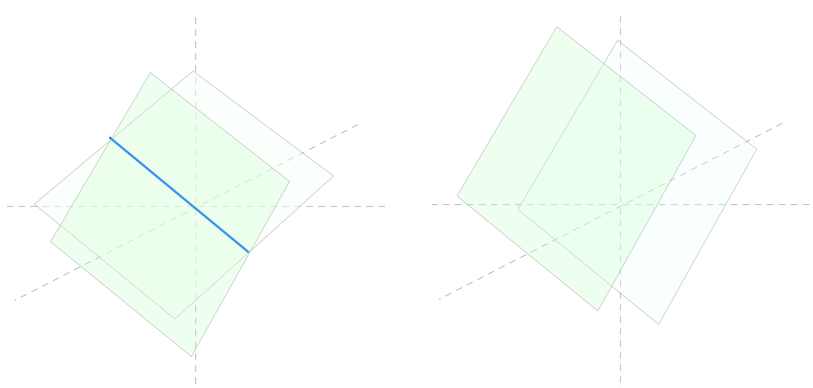


Consideremos ahora un sistema de dos ecuaciones lineales:

$Ax+By+Cz=D$

$Ex+Fy+Gz=H$

Como las soluciones de cada ecuación son los puntos de un plano, las soluciones del sistema son los puntos en la intersección de los planos, así que forman una linea (si los planos se cruzan) o el vacío (si los planos son paralelos) o todo un plano (si los planos son iguales), y es fácil checar en que caso estamos viendo si los vectores (A,B,C) y (E,F,G) tienen direcciones distintas o iguales.



Finalmente consideremos un sistema de 3 ecuaciones lineales:

$Ax+By+Cz = D$

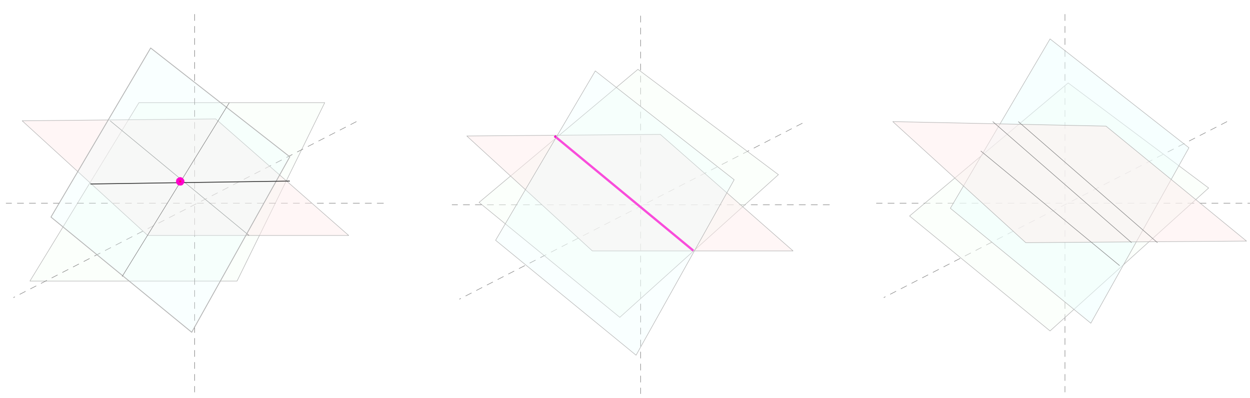
$Ex+Fy+Gz = H$

$Ix+Jy+Kz = L$

Las soluciones son los puntos en la intersección de 3 planos. Si los vectores (A,B,C) (E,F,G) y (I,J,K) no son coplanares (lo mas probable, y que podemos checar viendo si el triple producto de los 3 vectores no es 0) entonces los 3 planos deben cruzarse y la intersección es un punto.

Si los 3 vectores normales son coplanares (lo que ocurre si su triple producto es 0) pero no hay 2 colineales entonces cada par de planos se cruza en una línea recta y las 3 lineas tienen la misma dirección, así que o coinciden o son paralelas. Las soluciones forman una recta o el vacío.

Si 2 vectores son colineales entonces esos 2 planos coinciden (las 2 ecuaciones son equivalentes y podemos olvidarnos de una) o son paralelos (dos ecuaciones son contradictorias y el sistema no tiene soluciones).



un punto *una linea* *el vacío*

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales?

$x+2y+3z = 4$

$2x-4y+z = 5$

Las soluciones del sistema son los puntos en la intersección de dos planos cuyos vectores normales son U=(1,2,3) y V=(2,-4,1), que no son colineales, así que las soluciones forman una recta en la dirección UxV. Podemos dar todas las soluciones hallando una, como $({}^{13}/_{4},{}^{3}/_{8},0)$ y sumándole un múltiplo del vector

UxV=(14,5,-8)

Así que las soluciones son $s(t)=({}^{13}/_{4},{}^{3}/_{8},0)+t(14,5,-8)$ o sea

$x= {}^{13}/_{4}+14t \qquad y={}^{3}/_{8}+5t \qquad z=-8t$

Ejemplo. ¿Como son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ 2x + 5y + z &= 7 \\ x + 4y - 7z &= 2 \end{aligned}$$

Las soluciones son los puntos de intersección de 3 planos cuyos vectores normales son

U=(1,3,2), V=(2,5,1) y W=(1,4,-7).

Estos 3 vectores no son coplanares ya que el triple producto UxV·W = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}$ =12 es distinto de 0.

Así que el sistema debe tener exactamente una solución.

Ejemplo. ¿Como son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 5y + z &= 7 \\ x + 4y - 7z &= 2 \end{aligned}$$

Las soluciones son los puntos de intersección de 3 planos con vectores normales

U=(1,2,3), V=(2,5,1) y W=(1,4,-7).

Pero estos 3 vectores son coplanares ya que su triple producto UxV·W = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}$ = 0 .

Así que las soluciones forman una recta o no hay soluciones.

Podemos checar que las soluciones forman una recta, viendo que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras (es 2 veces la segunda menos 3 veces la primera) asi que las soluciones de las 3 ecuaciones son las soluciones de las 2 primeras.

Ejemplo. ¿Como son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 5y + z &= 7 \\ x + 4y - 7z &= 4 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son iguales a las del ejemplo anterior excepto por las constantes.

Los vectores normales son coplanares ya que su triple producto UxV·W es 0.

Pero en este caso la tercera ecuación no es combinación lineal de las 2 primeras, así que el tercer plano no contiene a la recta de intersección de los dos primeros y el sistema no tiene soluciones.

Problemas de repaso

18. Da todas las soluciones de estos sistemas de ecuaciones lineales, usando parámetros.

a. $x + y + z = 1$
$x - y - z = 1$

b. $3x - 4y + 6z = 2$
$x/4 - y/3 + z/2 = 1/5$

19. Di cuantas soluciones tienen estos sistemas de ecuaciones lineales, sin resolverlos.

a. $x + 3y + 2z = 4$
$x + 2y + z = 5$
$x + 4y + 3z = 3$

b. $x + y - z = 1$
$x - y - z = 2$
$x - y + z = 3$

c. $5x + 2y + z = 5$
$3x + y + 2z = 4$
$4x + y + 5z = 3$

20. Da las ecuaciones de 3 planos perpendiculares entre sí que contengan al punto (1,2,3) y no sean paralelos a ninguno de los planos de coordenadas.