Ecuación vectorial y paramétrica de una recta en el espacio

Aprenderé a: identificar y describir rectas en el espacio, deducir la ecuación vectorial de la recta en el espacio y su relación con la ecuación paramétrica.

Repaso

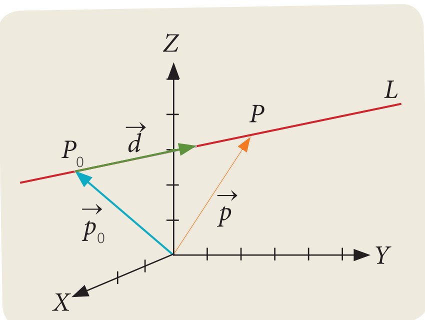
1. **¿Cuál es la diferencia entre el vector posición y el vector director en una ecuación vectorial de la recta? Explica.**

Al ubicar dos puntos en el plano, siempre podemos trazar una recta que los contiene. Si ubicamos dos puntos en el plano cartesiano, podemos determinar la ecuación de la recta y justificar que es la única recta que pasa por los dos puntos (quizá podamos escribirla de diferentes maneras, pero la recta sigue siendo la misma, no hay dos rectas distintas que pasen por dos puntos fijos del plano).

Ahora, ¿qué sucede en el caso de puntos en el espacio? Esto es, dados los puntos en el espacio P y Q, ¿existe una recta que pase por P y Q?, ¿existe más de una?, ¿cómo lo sabes?

- Además de los vectores posición y director, ¿es necesario considerar un nuevo vector para identificar una recta en el espacio?, ¿por qué?

Observa que en el espacio cartesiano, requerimos de tres coordenadas para ubicar cada punto correctamente, pero para representar una recta no sucede que necesitemos tres vectores distintos. En cambio, podemos utilizar su vector posición y su vector director para escribir la ecuación vectorial, tal como en el plano, la diferencia está en que ahora estos vectores tienen tres coordenadas.



La ecuación vectorial de una recta en el espacio, se escribe tal como la de una recta en el plano, pero extendiéndola a tres coordenadas. Es decir, la ecuación de la recta pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y tiene dirección $\vec{d}$, dada por el vector $\vec{d} = \langle d_1, d_2, d_3 \rangle$. Sea P un punto cualquiera de la recta L, entonces $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{d}$, por lo tanto $\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\vec{d}$.

$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + \lambda\langle d_1, d_2, d_3 \rangle$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

O también $\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + \lambda d_1, y_0 + \lambda d_2, z_0 + \lambda d_3 \rangle$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Cómo hacerlo?

Dados los puntos en el espacio $P(3, -3, 5)$ y $Q(1, 4, 6)$, ¿cuál es la ecuación vectorial de la recta L que los contiene?

Tal como al escribir la ecuación en el plano, escogemos cualquiera de los dos puntos como vector posición. Digamos que usamos $\vec{p} = \langle 3, -3, -5 \rangle$.

Luego, calculamos el vector director, que corresponde a $\overrightarrow{PQ}$.

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \overrightarrow{PQ}\\ &= \vec{q} - \vec{p}\\ &= \langle 1, 4, 6 \rangle - \langle 3, -3, 5 \rangle\\ &= \langle -2, 7, 1 \rangle\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de L es $\langle x, y, z \rangle = \langle 3, -3, -5 \rangle + \lambda\langle -2, 7, 1 \rangle$.

Observa que la ecuación $\langle x, y, z \rangle = \langle 1, 4, 6 \rangle + \lambda\langle -2, 7, 1 \rangle$ también representa a la recta L.

¿Lo entiendes?

Si usamos como vector director $\vec{d} = \langle 2, -7, -1 \rangle$, ¿representa la misma recta? Explica.

¿Cómo hacerlo?

Los puntos $P(1, 1, 1)$, $Q(0, 1, -1)$ y $R(2, 1, 3)$, ¿son colineales?
Si lo fueran, escribe la ecuación vectorial de la recta que los contiene.

Podemos asegurar que los puntos P, Q y R son colineales si comparamos los vectores que tienen origen y extremo en estos puntos. Si estos vectores no son paralelos, los tres puntos no pueden estar en la misma recta, porque en realidad serían como los vértices de un triángulo. Pero cuando son paralelos y como además, necesariamente, tienen un punto en común, entonces estos puntos están en la misma recta.

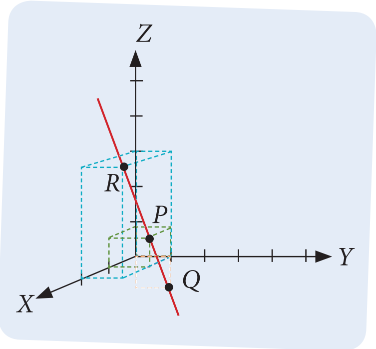
Primero, verificamos si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ son paralelos:

$\overrightarrow{PQ} = \langle 0 - 1, 1 - 1, -1 - 1 \rangle = \langle -1, 0, -2 \rangle$

$\overrightarrow{QR} = \langle 2 - 0, 1 - 1, 3 - -1 \rangle = \langle 2, 0, 4 \rangle$.

¿Son paralelos? Para asegurar esto, podemos determinar si existe un número real λ, tal que $\overrightarrow{QR} = \lambda \overrightarrow{PQ}$.

En efecto, si $\langle 2, 0, 4 \rangle = \lambda \langle -1, 0, -2 \rangle$, entonces, igualando componente a componente, tenemos que $2 = -\lambda$ y $4 = -2\lambda$, de donde podemos inferir que $\lambda = -2$. Por lo tanto, los puntos P, Q y R son colineales.



Para escribir la ecuación de la recta que contiene a P, Q y R podemos utilizar como vector de posición a $\vec{p}$ y como vector director a $\overrightarrow{QR}$.

$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + \lambda \langle d_1, d_2, d_3 \rangle$.

$\langle x, y, z \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle + \lambda \langle 2, 0, 4 \rangle$

Ahora, si utilizáramos el vector $\vec{r}$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$, obtendríamos una ecuación diferente, $\langle x, y, z \rangle = \langle 2, 1, 3 \rangle + \lambda_1 \langle -1, 0, -2 \rangle$, pero que representa la misma recta.

Una misma recta puede representarse mediante distintas ecuaciones vectoriales. Esto sucede porque, por ejemplo, los vectores $\langle 2, 0, 4 \rangle$ y $\langle -1, 0, -2 \rangle$ representan la misma dirección. Por otra parte, cualquiera de los puntos que pertenecen a la recta puede utilizarse como vector posición.

Para verificar que un punto pertenece a una recta, podemos determinar cuál es el valor de λ de modo que se satisfaga la ecuación vectorial correspondiente. Por ejemplo, $\langle 2, 1, 3 \rangle$ pertenece a la recta de ecuación $\langle x, y, z \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle + \lambda \langle 2, 0, 4 \rangle$ porque al remplazar $\lambda = \frac{1}{2}$ se satisface la igualdad:

$$\langle 2, 1, 3 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle + \frac{1}{2} \cdot \langle 2, 0, 4 \rangle$$

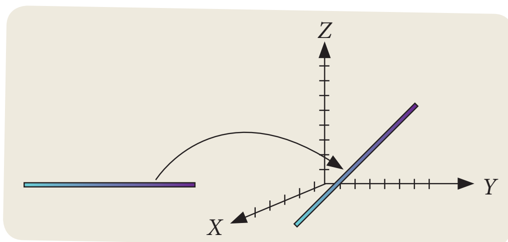
Tomo nota

- La ecuación vectorial de la recta en el espacio está dada por la expresión $\langle x, y, z \rangle = \vec{p}_0 + \lambda \vec{d} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + \lambda \langle d_1, d_2, d_3 \rangle$, donde:
  - $\vec{d} \langle d_1, d_2, d_3 \rangle$ es el vector director de la recta;
  - $\vec{p}_0 \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ es el vector posición de la recta;
  - λ es el parámetro.

Actividades

1. **Escribe la ecuación vectorial de la recta L que pasa por $P(12, -5, 7)$ y $Q(0, 6, -3)$.**
2. **Determina si los siguientes puntos son colineales. Si así fuera, escribe la ecuación vectorial correspondiente.**
   a. $P(1, 0, 2)$, $Q(-1, 1, 1)$ y $R(3, -1, 1)$.
   b. $P(-1, -1, -1)$, $Q(-1, 0, 1)$ y $R(-1, -2, -3)$.
   c. $P(0, -1, -2)$, $Q(0, 2, 4)$ y $R(0, 1, 2)$.
   d. $P(4, 2, 1)$, $Q(3, 7, 3)$ y $R(1, -5, -2)$.
3. **Considera la siguiente recta en el espacio, de ecuación $\langle 1, 2, 1\rangle + \lambda \langle 0, 1, 1\rangle$.**
   a. Encuentra, para cuatro valores distintos de λ, cuatro puntos que pertenezcan a la recta.
   b. Determina los valores de λ con los cuales puedes establecer que $(1, 1, 0)$ y $(1, 2, 1)$ pertenecen a la recta.
   c. Justifica por qué el punto $(1, 6, 6)$ no pertenece a la recta.

Cuando utilizamos la ecuación vectorial de la recta, cada valor de λ que remplacemos en la ecuación determina un único punto en el espacio. Además, sucede que si pudiéramos remplazar los distintos valores de λ, uno a uno, podríamos ver cómo se va construyendo la recta de forma continua. Dicho de otra manera, a medida que se avanza en la recta numérica real, con distintos valores de λ, se avanza también en la recta en el espacio correspondiente a la ecuación.



Atención

Una función entre un conjunto A y un conjunto B es una asignación de cada elemento del conjunto A con un único elemento del conjunto B.

Para comprender mejor esta relación, puedes imaginar el parámetro λ como el tiempo y pensar que, a medida que el tiempo transcurre, se va avanzando en la recta (que está definida por la ecuación) de forma continua por el espacio. Así, cada instante de tiempo determina un punto en el espacio.

Si consideramos esta relación como una función, cuyo dominio corresponde a la recta numérica real y su recorrido, a la recta en el espacio, veremos que a cada valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ se le asigna el punto en el espacio $(1, 2 + \lambda, 1 + \lambda)$. Esto, expresado en términos de función, es $f(\lambda) = (1, 2 + \lambda, 1 + \lambda)$, la que se conoce como **función paramétrica**.

¿Cómo hacerlo?

¿Cuál es la función paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(1, 2, -1)$ y $(-2, 3, 2)$?

Calculamos el vector director, $\langle d_1, d_2, d_3\rangle = \langle 1 - -2, 2 - 3, -1 - 2\rangle = \langle 3, -1, -3\rangle$ y luego, escogemos uno de los puntos como vector posición $\langle x_0, y_0, z_0\rangle = \langle 1, 2, -1\rangle$.

Entonces, escribimos la función $f(\lambda) = \langle x_0 + \lambda \cdot d_1, y_0 + \lambda \cdot d_2, z_0 + \lambda \cdot d_3\rangle$, esto es: $f(\lambda) = \langle 1 + 3 \cdot \lambda, 2 - \lambda, -1 - 3 \cdot \lambda\rangle$

Ahora, podemos escribir la ecuación paramétrica $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + \lambda d_1, y_0 + \lambda d_2, z_0 + \lambda d_3\rangle$ como tres ecuaciones, igualando coordenada a coordenada:

$$x = x_0 + \lambda d_1$$
$$y = y_0 + \lambda d_2$$
$$z = z_0 + \lambda d_3$$

Como puedes observar, si conocemos el vector posición $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y el vector director $\langle d_1, d_2, d_3\rangle$, los valores de x, y, z dependen solo del parámetro λ, por lo tanto, podemos reescribir las ecuaciones anteriores como funciones en los números reales.

$$x(\lambda) = x_0 + \lambda d_1$$
$$y(\lambda) = y_0 + \lambda d_2$$
$$z(\lambda) = z_0 + \lambda d_3$$

Estas tres ecuaciones definen la misma recta, pero permiten expresar cómo varía cada coordenada con respecto al parámetro λ.

Tomo nota

- La imagen de la **función paramétrica** $f(\lambda) = \langle x_0 + \lambda d_1, y_0 + \lambda d_2, z_0 + \lambda d_3\rangle$ representa una recta en el espacio, cuya ecuación vectorial es $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\langle d_1, d_2, d_3\rangle$.
- La **ecuación paramétrica** de la recta en el espacio está dada por $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + \lambda d_1, y_0 + \lambda d_2, z_0 + \lambda d_3\rangle$.
- Podemos separar la ecuación paramétrica en tres ecuaciones, que definen la misma recta, y que llamaremos **ecuaciones paramétricas de la recta** en el espacio.

$$x = x_0 + \lambda d_1$$
$$y = y_0 + \lambda d_2$$
$$z = z_0 + \lambda d_3$$

Actividades

1. **Determina la función paramétrica que define la recta en el espacio que pasa por los siguientes puntos. Luego, escribe la ecuación paramétrica de cada recta.**
   a. $P(4, 2, 7)$, $Q(3, -1, 6)$
   b. $P(1, 3, -4)$, $Q(0, -2, 2)$
   c. $P(0, 3, 5)$, $Q(-2, 1, -3)$
   d. $P(2, 4, 7)$, $Q(3, -2, 1)$
2. **Para cada una de las siguientes rectas, escribe sus ecuaciones paramétricas.**
   a. Recta que pasa por $P(2, 2, -3)$ y $Q(-1, -1, 1)$.
   b. Recta con vector director $\langle 5, 2, 0\rangle$ y vector posición $\langle 6, 0, 2\rangle$.
   c. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, 5, -9\rangle + \mu\langle -3, 4, -5\rangle$
   d. Recta que pasa por $P(1, 4, -7)$ y $Q(-2, 0, 3)$.
   e. Recta con vector director $\langle -2, 5, 1\rangle$.
   f. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, -6\rangle + \mu\langle -4, 3, -6\rangle$

Antes de continuar

1. ¿Cuáles son las diferencias entre la ecuación vectorial y la ecuación paramétrica de una misma recta?
2. ¿Cuáles son las posibles ventajas de escribir la ecuación en su forma paramétrica?