Este trabajo, en el que se analiza la *<u>indeterminación en el cálculo de límites,</u>* *ha sido realizado por Jorge Sánchez Ruano y se publica bajo licencia libre, por lo que queda disponible para que cualquier persona lo complemente con sus conocimientos sobre la materia. Además, el autor se compromete a que esta publicación sea una creación comunitaria de conocimientos, de la que cualquier persona puede hacer uso y cuyo contenido puede mejorar.*

<u>LAS INDETERMINACIONES EN EL CÁLCULO DE LÍMITES</u>

Los objetivos que persigue este trabajo son los siguientes:

- Introducir el concepto de la indeterminación en el cálculo de límites.
- Identificar los distintos tipos de indeterminaciones que se pueden presentar en el cálculo de límites y presentar los correspondientes métodos de resolución de cada una de ellos.
- Proporcionar una "pincelada" de la historia de las indeterminaciones, con una breve reseña sobre el matemático Otto Stolz, cuyo trabajo contribuyó a la resolución de los límites indeterminados.

Aunque el contenido de este trabajo tiene cierto carácter teórico, se ha desarrollado sin perder de vista un enfoque práctico, de manera que sirva para facilitar la comprensión del cálculo de límites y tenga como aplicación directa la resolución de los ejercicios planteados en la asignatura de Cálculo Ingeniera Informática para lo que se incluye una explicación detallada de cómo resolver cada tipo de indeterminación.

Antes de abordar el estudio de las indeterminaciones, conviene indicar que éstas pueden presentarse en el cálculo de límites tanto de sucesiones como de funciones. Sin embargo, para explicar el concepto de indeterminación y analizar los distintos tipos que existen y cómo resolverlos vamos a centrarnos en los límites de sucesiones, aunque todo lo dicho se podría aplicar de manera análoga al cálculo de límites de funciones.

1.¿Qué es una indeterminación?

El concepto de indeterminación en el cálculo de límites de sucesiones se puede detectar al estudiar las propiedades aritméticas de estos límites.

Así, se observa que, aunque en general al operar algebraicamente con sucesiones convergentes (sumándolas, multiplicándolas, dividiéndolas, extrayendo logaritmos o elevando una a otra) se suelen obtener sucesiones que también son convergentes, y cuyos límites se pueden calcular a partir de los de aquéllas, esto no siempre es así, sino que hay casos singulares en los que no son de aplicación las citadas propiedades, y el posible límite (el de la sucesión que resulta al operar con ciertas sucesiones dadas) no depende sólo de los valores que tomen los límites de éstas, sino que varía de unos casos a otros, pudiendo, incluso, no existir.

Estos son los casos de los que vamos a ocuparnos, a los que llamaremos "límites indeterminados" o "casos de indeterminación", para lo que vamos a empezar con un breve repaso de las propiedades aritméticas de los límites citadas.

PROPIEDADES ARITMÉTICAS DE LOS LÍMITES

Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes, de números reales, cuyos límites son a, b $\in$ ***R***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Entonces también son convergentes las siguientes sucesiones, que tienen los límites que se señalan en cada caso:

1º lim (an + bn) = a+ b para $n\to\infty$
2º lim (an* bn) = a * b para $n\to\infty$
3º lim (an / bn) = a / b (si b !=0) para $n\to\infty$
4º lim (log an) = log a (si a > 0) para $n\to\infty$
5º lim (an^{bn}) = a^b (si a>0) para $n\to\infty$

Los cinco resultados procedentes son también válidos en aquellos casos en los que, siendo **a =** $\pm\infty$ ó **b =** $\pm\infty$, las operaciones con los límites a y b(a + b, a * b, a / b, log a, a^b) estén definidas o tengan sentido).

Pero nos preguntaremos qué es una indeterminación. Se suelen presentar en el cálculo de límites infinitos, esto es, al calcular el límite de una sucesión cuando n tiende a infinito, y seguro que más de una vez nos habremos topado con alguna , e incluso habremos sabido escoger un método para resolverla, pero ¿qué es exactamente una indeterminación?.

Vamos a empezar por la definición semántica de la propia palabra, la cual nos dice que:

Indeterminación: *Falta de resolución o determinación en las cosas.*

Sin embargo, la definición matemática va un poco más allá. Se refiere a aquellos casos del cálculo de límites en que, realizando las operaciones habituales, basadas en las propiedades aritméticas de los límites, llegamos a un resultado indefinido, es decir, nos encontramos con una falta de resolución o de determinación en el resultado, que no permite obtener directamente el valor del límite buscado, sino que hace necesarias operaciones adicionales para que, transformando la expresión de modo que desaparezca la indeterminación, lleguemos al valor de dicho límite.

Analizando las diferencias entre un límite determinado y otro indeterminado podremos entender un poco mejor la definición de límite indeterminado o indeterminación.

Un límite es determinado cuando su valor es un número real ó $+\infty$ ó $-\infty$.

EJEMPLO 1: (Límite determinado)

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)/(2n+3) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{2n+3}{n}} \to \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} \to \frac{1+0}{2+0} \to 1/2 \text{ (Numero Real)}$$

EJEMPLO 2: (Límite determinado)

$$\lim_{n\to\infty} (5n + 4)/(1/n +1) = \infty \text{ (Infinito)}$$

En estos casos, basta con operar algebraicamente en las expresiones cuyo límite cuando n tiende a infinito se quiere calcular, para hallar el valor de dicho límite.

Sin embargo, hay otros casos en que estamos ante límites indeterminados, lo que no significa que el límite no exista, o que no se pueda determinar, sino que la aplicación de las propiedades de los límites, tal como las hemos enunciado, no son válidas para llegar al valor del límite buscado, siendo preciso realizar otra serie de operaciones para llegar al resultado.

EJEMPLO 3: (Límite indeterminado)

$$\lim_{n\to\infty} [n^2-n] = \infty-\infty \qquad \underline{\textit{Indeterminación}}$$

Se observa que, en este caso, realizando operaciones algebraicas llegamos a una expresión de la que a priori no sabemos el resultado, pues ¿qué resulta de restar un valor infinito a otro?, ¿cuál de los dos es un infinito más grande?, no sabríamos qué responder, ya que nos encontramos ante una indeterminación.

Para resolverla es necesario transformar la expresión en otra equivalente, es decir, que siga teniendo el mismo límite, pero en la que no aparezca la indeterminación y sea posible calcular el valor del límite buscado.

En este ejemplo, para hacer desaparecer la indeterminación, basta con factorizar la expresión, llegando a otra cuyo límite cuando n tiende a infinito es del tipo $\infty \cdot \infty$, cuyo resultado es también ∞.

$$\lim_{n\to\infty} (n^2-n) = \infty-\infty \qquad \textit{Indetemincación} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} n\cdot(n-1) = \infty$$

Aunque todavía no hemos visto los distintos tipos de indeterminaciones que podemos encontrar y, por tanto, no las identifiquemos como tal, el ejemplo permite ver cómo con una sencilla transformación de la expresión se ha llegado a otra equivalente en la que ya no había indeterminación para el cálculo del límite.

En este ejemplo la transformación era sencilla y la idea estaba clara, pero hay otros casos en los que, para llegar a la expresión sin indeterminación, hay que recurrir a procesos de transformación más complejos.

Para saber las operaciones que hay que realizar en cada caso para resolver la indeterminación que encontremos, es necesario que primero sepamos identificar los **tipos de indeterminaciones** que existen. Así, atendiendo al tipo, escogeremos entre un método de transformación u otro, ya que para resolver un límite indeterminado no existe una regla general que pueda ser aplicada en todas las situaciones, sino que el procedimiento es diferente para los distintos tipos de indeterminaciones.

A continuación vamos a ver los tipos de indeterminaciones que se pueden presentar en el cálculo de límites y cuál es el procedimiento a seguir para resolver cada uno de ellos.

2. Tipos de Indeterminaciones

Teniendo en cuenta que estamos ante casos de cálculo del límite de sucesiones convergentes cuando n tiende a infinito (∞), para poder identificar los distintos tipos de indeterminación que se pueden presentar, vamos a empezar por repasar las operaciones con ∞.

Operaciones con ∞:

●$\infty + \infty = \infty$

●$\infty + a = \infty \ \forall \ a \in \mathbf{R}$

●$\infty * a \rightarrow \infty$ *si* $a > 0$
●$\infty * a \rightarrow -\infty$ *si* $a < 0$
●$\infty * a \rightarrow \infty$ *Indeteminado si* $a = 0$

●$\infty / a = \infty * \frac{1}{a} \rightarrow \infty$ *si* $a > 0$

●$\infty / a = \infty * \frac{1}{a} \rightarrow -\infty$ *si* $a < 0$

●$\infty / a = \infty * \frac{1}{a} \rightarrow$ *no* $\exists$ *si* $a = 0$

●$\infty^{a} = \infty$ *si* $a > 0$
●$\infty^{a} = 0$ *si* $a < 0$
●*Indeteminado si* $a = 0$

●$a^{\infty} = \infty$ *si* $a > 1$
●$a^{\infty} = 0$ *si* $-1 < a < 1$
●$a^{\infty} = 1$ *si* $a = 1$ *aunque* $\lim_{n\to\infty} an^{bn}$ *es indeterminado si* $\lim an = 1$ *y* $\lim bn = \infty$

Tipos de Indeterminaciones:

$\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\infty * 0$, $\frac{0}{0}$, 0^0, 1^{∞}, ∞^0.

Una vez identificada cada una de las indeterminaciones, vamos a proceder a explicar como se resuelve cada una de ellas:

En el cálculo de límites, los casos de indeterminación de los tipos 0/0 e ∞ /∞ son los más frecuentes y a ellos se suelen reducir algunas de las demás; de ahí que nos ocupemos primero de esos dos tipos.

Indeterminación tipo $\frac{\infty}{\infty}$

En este tipo de indeterminación se verifica que tanto numerador y denominador se hacen tan grandes como queramos. Sólo tenemos que prestar atención a qué término se dispara más rápidamente a ∞ para averiguar el valor del límite.

Podemos resolver esta indeterminación por dos métodos:

1. **Por comparación de infinitos.**

Cuando $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Lim} \quad \frac{2n^5 + 3n^2}{n^5 + n^3} = \infty$$

Cuando el grado del polinomio del numerador es superior al del denominador, el limite es $\pm \infty$, dependiendo del signo del coeficiente de mayor grado, esto es debido a que al ser mayor el grado del numerador, este se dispara antes hacia el ∞ y al ser el numerador de mayor peso, prevalece que el resultado final sea ∞.

$$\text{Lim} \frac{2n^5 + 3n^2}{n^7 + n^3} = 0$$

Cuando el grado del polinomio del numerador es inferior al del denominador, el límite es 0. Esto es debido a que al ser mayor el grado del denominador, este se dispara antes hacia el infinito ∞, y al ser el denominador de mayor peso, el resultado es 0, porque cualquiera valor entre ∞ se reduce a 0.

$$\text{Lim}\ \frac{2n^5 + 3n^2}{3n^5 + n^3} = \frac{2}{3}$$

Cuando numerador y denominador crecen por igual, el resultado del límite se obtiene al dividir los coeficientes directores del numerador y denominador.

$$\text{Lim}\ \frac{3^n}{2^n} = \infty$$

Al tener el límite el mismo grado, se estudia los coeficientes del cociente.

2 .Si se trata de funciones potenciales dividimos todos los sumandos por la x elevada al mayor exponente.

$$\text{Lim}\ \frac{2n^5 - 3n^2}{n^4 - n^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Lim}\ \frac{\frac{2n^5}{n^5} - \frac{3n^2}{n^5}}{\frac{n^4}{n^5} - \frac{n^3}{n^5}} = \frac{2 - \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 0}{0 - 0} = \infty$$

Como hemos visto en la imagen hemos divido cada uno de los sumandos por el de mayor grado.

Si son funciones exponenciales dividimos por la exponencial de mayor base.

$$\text{Lim}\ \frac{3^{n+2} + 2^n}{3^{n-2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Hacemos exactamente lo mismo, en el caso de que las sucesiones sean exponenciales.

$$\text{Lim}\ \frac{3^n \cdot 3^2 + 2^n}{3^n \cdot 3^{-2}} = \text{Lim}\ \frac{\frac{3^n \cdot 3^2}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n \cdot 3^{-2}}{3^n}} = \frac{9 + 0}{\frac{1}{9}} = 81$$

Indeterminación tipo $\frac{0}{0}$

1. **Función racional sin radicales:**

Se descomponen en factores los polinomios y se simplifica la fracción.

Lim $\frac{a_n}{b_n}$ cuando n→ -1

Lim $\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}=\frac{0}{0}$

El resultado del límite es el cociente de $\frac{0}{0}$ que es una indeterminación.

Lim $\frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n-1)}$ = Lim $\frac{(n+1)}{n-1}=\frac{0}{-2}=0$

Vemos que han factorizado tanto numerador y denominador, para transformar la expresión, y queda como resultado final 0.

Lim $\frac{n^2-1}{n^2+2n+1}=\frac{0}{0}$

Lim $\frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$ = Lim $\frac{n-1}{n+1}=\frac{-2}{0}$

Lim $\frac{n-1}{n+1}=\infty$ cuando n → -1^-

Lim $\frac{n-1}{n+1}=-\infty$ cuando n → -1^+

2.Función racional con radicales:

En primer lugar **multiplicamos numerador y denominador por el conjugado** de la expresión irracional.

Realizamos las operaciones y simplificamos la fracción.

Indeterminación tipo $\infty - \infty$

1. **Con funciones racionales**.

Ponemos a **común denominador**, y obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$. Resolvemos esta indeterminación.

$$\text{Lim}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{2n}{n^2-4}\right) = \infty - \infty \qquad \text{cuando } n \to 2$$

El resultado del límite cuando n→ 2 es $\infty - \infty$ y queda como resultado una indeterminación, ya que tenemos dos valores que tienden a ∞ . Como no sabemos que valor es mayor, el resultado podría ser positivo, negativo, o en el caso de ser los dos iguales 0

$$\text{Lim } \frac{1-2n(n+2)}{n^2-4} = \text{Lim } \frac{-2n^2-4n+1}{n^2-4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Lim } \frac{-2n^2-4n+1}{n^2-4} = -2$$

2.<u>Cuando se trata de</u> **<u>sucesiones irracionales podemos multiplicar y dividir por el conjugado</u>**.

Siendo $a_n = \sqrt{n^2-2}$ y $b_n = \sqrt{n^2+n}$

Lim an – bn cuando n→ ∞ .

$$\text{Lim } (\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2+n}) = \infty - \infty$$

Hemos multiplicado el numerador y denominador por la expresión conjugada.

$$\text{Lim } \frac{[(\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2+n})]}{(\sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2+n})} =$$

$$\text{Lim} \frac{n^2-2-n^2-n}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+n}} = \quad \text{Lim } \frac{-2-n}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+n}} =$$

Simplificamos la expresión del cociente:

$$\text{Lim } \frac{\frac{-2}{n} - \frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2}}} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

Indeterminación tipo $0\cdot\infty$

Se transforma a $\frac{\infty}{\infty}$ ó a $\frac{0}{0}$

$$a_n \cdot b_n = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = \frac{b_n}{\frac{1}{a_n}}$$

Siendo $a_n = n + 7 \quad b_n = \sqrt{\frac{1}{4n^2 + 3}} = \infty \cdot 0$

Lim $a_n \cdot b_n$ cuando $n \to \infty$:

$$\text{Lim } (n+7)\cdot\sqrt{\frac{1}{4n^2 + 3}} = \infty \cdot 0$$

Introducimos el primer factor en la raiz:

$$\text{Lim } \sqrt{\frac{(n+7)^2}{4n^2 + 3}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\sqrt{\lim \frac{n^2 + 14n + 49}{4n^2 + 3}} = \sqrt{1/4} = 1/2$$

Indeterminación tipo 1^∞

Para resolver este tipo de indeterminaciones, utilizamos la definición del número e:

En la práctica:

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{y } a_n \,!{=}1 \quad \text{entonces } \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim (a_n-1)\, b_n}$$

Ejemplo:

Si el resultado del límite cuando $n \to \infty$ es una indeterminación.

$$\lim_{n\to\infty} (1 - 1/3n)^{2n} = 1^{\infty}$$

Aplicamos el concepto de la definición del número e.

$$\lim_{n \to \infty} (1 - 1/3n)^{2n} = e^{\lim(1-(1/3n)-1)*2n} = e^{\lim -2n/3n} = e^{-2/3}$$

Como resultado del límite, después de aplicarle el concepto de la indeterminación, es $e^{-2/3}$

Por último las indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0

Se resuelve aplicando logaritmos.

Ejemplo:

Calcular : $\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = \infty^0$

Como el resultado del límite es ∞^0, aplicamos logaritmos a ambos lados de la igualdad.

$$\text{Sea } y = \lim_{n \to \infty} n^{1/n} \to \ln y = \ln \lim_{n \to \infty} n^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \ln n^{1/n} = \lim \frac{1}{n} \ln n = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{n-(n-1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n/n-1)}{n-(n-1)} (*) = \ln \lim_{n \to \infty} (n/n-1) = \ln 1 = 0.$$

Por el criterio de stolz conseguimos llegar a una expresión tal que el resultado es igual a ln 1 =0

entonces: $\ln y = 0 \to y = e^0 = 1 \to \lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$

(*)

Criterio de Stolz

Sean a_n y b_n dos sucesiones de números reales tales que se verifica una de las dos condiciones siguientes:

1- b_n es monótona divergente.
2- $\lim a_n = \lim b_n = 0$ y bn es monótona.

Entonces si existe $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ *tambien existe* $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ *y son iguales*

3. El matemático Otto Stolz

En el contenido teórico nos centraremos en **Otto Stolz,** nacido el 3 de mayo de 1842, y que murió el 25 de octubre de 1905. Otto Stolz fue un gran matemático austríaco destacado por su gran trabajo sobre el análisis matemático e infinitesimal. Su nombre es muy conocido dentro de las matemáticas por el teorema de Stolz-Cesaro.

Como hemos visto, esta regla o propiedad, es una herramienta eficaz para calcular indeterminaciones como la de ∞^{o} y para calcular límites de cocientes (a_n / b_n), en los casos de indeterminación del tipo 0/0 e ∞/∞, bajo ciertas hipótesis *(b_n es monótona divergente).*
*P*ara hallar el limite:

$$\text{si existe } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \rightarrow \text{ también existe } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ y son iguales.}$$

Stolz estudió en la Universidad de Innsbruck antes de pasar a la Universidad de Viena donde realizó la investigación para su doctorado. Después de la adjudicación de su doctorado, Stolz estudió en la Universidad de Viena y trabajó allí hasta 1869. Obtuvo una beca que le permitirá estudiar en Alemania desde 1869 hasta 1871. Fue primero a Berlín, donde asistió a conferencias de los tres grandes matemáticos: Weierstrass, Kummer y Kronecker, y a continuación, estudió en Göttingen.

Su período de estudios en Alemania marcó la adición de un nuevo tema para su centro de interés. Él estaba muy de acuerdo con el punto de vista de Weierstrass en el análisis y comenzó a investigar los problemas en esa zona, que han demostrado ser sus más importantes contribuciones.

En julio de 1872 Stolz fue nombrado como un excelente profesor en su ciudad natal de Innsbruck.

Sus temas de investigación son de gran alcance:

Sus primeros documentos se refieren al análisis o la geometría algebraica, incluida la trigonometría esférica.

Más tarde se dedicó cada vez más a la investigación del análisis real, en particular, a problemas de convergencia en la teoría de la serie, incluida la serie; los límites de los coeficientes indeterminados, y la integración.

bibliografía :

Cálculo infinitesimal de una variable por Juan de Burgos (McGRAW-HILL).

Matemática 2º BACHILLERATO por J.M.ARIAS e I.MAZA (Casals)

Wikipedia, la enciclopedia libre
http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada

Parte de la biografia de Otto Stolz se ha recogido de:
www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Stolz.html