12. Teorema Fundamental del Cálculo

12.1 Antiderivadas

A continuación recopilamos las derivadas de las funciones que desarrollamos anteriormente.

$$F(x) \xrightarrow{\text{Derivando}} F'(x)$$

$$x^a \text{ (para cualquier } a \in \mathbb{R}) \dashrightarrow a x^{a-1}$$

$$e^x \dashrightarrow e^x$$

$$a^x \text{ (para } a > 0) \dashrightarrow a^x \ln(a)$$

$$\ln(x) \dashrightarrow \frac{1}{x}$$

$$\log_a(x) \text{ (para } a > 0) \dashrightarrow \frac{1}{x\ \ln(a)}$$

$$F(x) \xrightarrow{\text{Derivando}} F'(x)$$

$$\operatorname{sen}(x) \dashrightarrow \cos(x)$$

$$\cos(x) \dashrightarrow -\operatorname{sen}(x)$$

$$\tan(x) \dashrightarrow \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\operatorname{arc\,cos}(x) \dashrightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arc\,sen}(x) \dashrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan(x) \dashrightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

Decimos, por ejemplo que

$$f(x) = 3x^2 \text{ es la derivada de } F(x) = x^3$$

El **proceso inverso** se denomina **antiderivada**.
Decimos que

$$F(x) = x^3 \text{ es } \textbf{una antiderivada} \text{ de } f(x) = 3x^2$$

Y aquí debemos remarcar que este **proceso inverso** no es único (nunca). Porque existen una cantidad infinita de funciones que son **antiderivadas** de $f(x) = 3x^2$.

En todos los casos debe considerarse el dominio de las funciones y sus derivadas tal como se detalló en los módulos anteriores. Por ejemplo, recordar que las funciones exponenciales están definidas y son derivables en todo $\mathbb{R}$. En cambio, la función x^a con $a = \frac{1}{2}$ está definida en el intervalo $[0, +\infty)$ y es derivable sólo en el intervalo $(0, +\infty)$.

$$F_1(x) = x^3 \dashrightarrow f(x) = 3x^2$$

$$F_2(x) = x^3 + 1 \dashrightarrow f(x) = 3x^2$$

$$F_3(x) = x^3 + \pi \dashrightarrow f(x) = 3x^2$$

$$F_4(x) = x^3 - 3 \dashrightarrow f(x) = 3x^2$$

$$\vdots$$

$$F_C(x) = x^3 + C \dashrightarrow f(x) = 3x^2$$

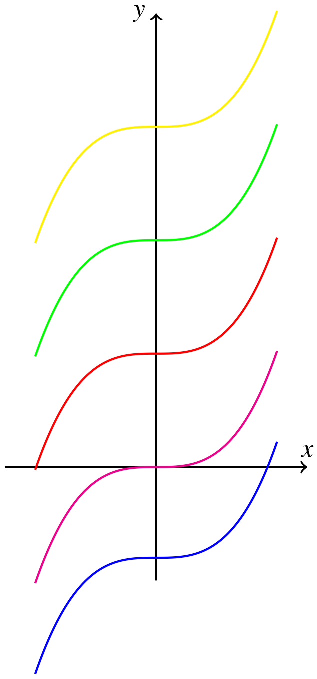


Figura 12.1: Varias antiderivadas de la función $f(x) = 3x^2$.

Si $H(x)$ es una función tal que $H'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces tomando x_2 y $x_1 \in (a, b)$ se tiene, usando el Teorema del Valor Medio, que existe $\tilde{x}$ en el intervalo (a, b) tal que

$$H(x_2) - H(x_1) = \underbrace{H'(\tilde{x})}_{=0}(x_2 - x_1)$$

Por lo tanto

$$H(x_2) - H(x_1) = 0$$

O sea, $H(x_2) = H(x_1)$. Y por lo tanto H es una función constante.

Podemos decir que cualquier función de la forma

$$F_c(x) = x^3 + C$$

(donde C puede ser cualquier número real) es una **antiderivada** de la función $f(x) = 3x^2$ en todo $\mathbb{R}$.

Definición 12.1.1 Una función $F(x)$ de dice **antiderivada** o **primitiva** de la función $f(x)$ en un intervalo (un intervalo que puede ser de cualquier forma) si $F'(x) = f(x)$.

C No todas las funciones tienen una antiderivada en cualquier intervalo. La existencia o no de las antiderivadas estará condicionada a las propiedades de la función (incluyendo el dominio que se esté considerando).
Sin embargo, si una función f tiene alguna primitiva en algún intervalo, entonces necesariamente tendrá una cantidad infinita de primitivas (por lo detallado más arriba) que se pueden construir sumando cualquier constante C.
El siguiente teorema dice un poco más. Dice que todas las **antiderivadas** de una función (en el caso que exista alguna) son exclusivamente de la forma en que se construyen sumando alguna constante C.

Teorema 12.1.1 Si F es una **antiderivada** de f en un intervalo (de cualquier forma), entonces **todas** las antiderivadas de f en el mismo intervalo son de la forma

$$F_C(x) = F(x) + C$$

para cualquier constante C.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos **antiderivadas** de la función $f(x)$ en el mismo intervalo (a, b) entonces

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

es una función derivable en el intervalo (a, b) y

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \in (a, b)$$

por lo tanto $H(x)$ debe ser una función constante (ver el recuadro del margen)

$$H(x) = C \quad \Longrightarrow F(x) = G(x) + C$$

■ **Ejemplo 12.1** Si consideramos $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ entonces $F(x) = -\cos(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$. De modo que el conjunto completo de funciones antiderivadas de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$ será de la forma

$$F(x) = -\cos(x) + C$$

■

■ **Ejemplo 12.2** La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ está definida en el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Determinaremos las antiderivadas de $f(x)$ en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ (lo haremos en cada intervalo por separado).
En el intervalo $(0, +\infty)$ sabemos que la función $F(x) = \ln(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ por lo tanto las antiderivadas en el intervalo $(0, +\infty)$ son de la forma

$$F_C(x) = \ln(x) + C$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$ no podemos usar la misma función $\ln(x)$ porque las funciones logarítmicas no están definidas para valores negativos de x. Sin embargo, podemos tomar $G(x) = \ln(-x)$ que sí está definida para $x < 0$ y además cumple

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)) \underbrace{=}_{\substack{\text{Regla de}\\ \text{la cadena}}} \frac{1}{-x}.(-1) = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ definida en el intervalo $(-\infty, 0)$. Todas las demás antiderivadas de $f(x)$ en ese intervalo serán de la forma

$$G_C(x) = \ln(-x) + D$$

■

Conociendo una antiderivada **particular** de una función en un cierto intervalo, podemos determinar todas sus posibles antiderivadas. Según las reglas de derivación y las derivadas de las funciones desarrolladas en módulos previos tenemos que

	$f(x)$	$\xrightarrow{\text{Una antiderivada particular}}$	$F(x)$
(*)	$k.f(x)$	$\dashrightarrow$	$k.F(x)$
(*)	$f(x) + g(x)$	$\dashrightarrow$	$F(x) + G(x)$
	x^a (para $a \neq -1$)	$\dashrightarrow$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
	e^x		e^x
	a^x (para $a > 0$)	$\dashrightarrow$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
(**)	$\frac{1}{x}$	$\dashrightarrow$	$\ln(\lvert x \rvert)$

$f(x)$	$\xrightarrow{\text{Una antiderivada particular}}$	$F(x)$
$\cos(x)$	$\dashrightarrow$	$\text{sen}(x)$
$\text{sen}(x)$	$\dashrightarrow$	$-\cos(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\dashrightarrow$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dashrightarrow$	$\text{arc sen}(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\dashrightarrow$	$\arctan(x)$

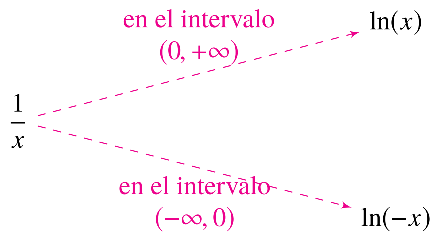
Encontrar antiderivadas en casos más complejos requiere técnicas o procedimientos que desarrollaremos en las próximas secciones. Las reglas marcadas con (*) permiten usar las propiedades de la derivada con la **suma** y con el **producto por un número** para determinar las antiderivadas en el caso de combinaciones lineales entre funciones. Por ejemplo,

$$F(x) = x^3 + 2\arctan(x) - 4\cos(x) \text{ es una antiderivada de } f(x) = 3x^2 + \frac{2}{1+x^2} + 4\,\text{sen}(x)$$

En cuanto a (**) usamos la notación $|x|$ para escribir de forma compacta la función

$$\text{Valor absoluto de } x = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

según lo desarrollado en el Ejemplo 12.2. De modo que se resumen cómo queda determinada una antiderivada particular en cada caso



Ejemplo 12.3 Las funciones $F(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$ y $G(x) = -\operatorname{arc\,cos}(x)$ son dos antiderivadas de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo $(-1, 1)$. Se puede verificar la afirmación anterior simplemente calculando $F'(x)$ y $G'(x)$.
De acuerdo al Teorema 12.1.1 debe existir una constante C tal que

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x) + C \qquad \text{para todo } x \in (-1,1). \\ \operatorname{arc\,sen}(x) &= -\operatorname{arc\,cos}(x) + C \\ \operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x) &= C \qquad \text{para todo } x \in (-1,1) \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ queda

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,sen}(0) + \operatorname{arc\,cos}(0) &= C \\ 0 + \frac{\pi}{2} &= C \end{aligned}$$

por lo que se tiene la siguiente identidad trigonométrica entre estas funciones inversas

$$\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x) = \frac{\pi}{2}$$

■

Ejemplo 12.4 Existe una cantidad infinita de funciones que son antiderivadas de $f(x) = e^x + 3\cos(x) - 4x^8$ en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo, hay una sola $F(x)$, antiderivada de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$, que cumple $F(0) = 4$.
Sabemos que todas las antiderivadas de $f(x)$ tienen la forma

$$F_C(x) = e^x + 3\operatorname{sen}(x) - \frac{4}{9}x^9 + C$$

que cumplen

$$F_C(0) = e^0 + 3\operatorname{sen}(0) - \frac{4}{9}0^9 + C = 1 + 0 + 0 + C = 1 + C$$

Por lo tanto, si resolvemos $1 + C = 4$ debe ser $C = 3$; y obtenemos que la única antiderivada en todo $\mathbb{R}$ que en $x = 0$ vale 4, resulta ser $F_3(x) = e^x + 3\operatorname{sen}(x) - \frac{4}{9}x^9 + 3$.
■

Actividad 12.1 Determinen, en cada caso, la única antiderivada de la función que cumpla con la condición que se solicita. Indiquen el dominio de validez correspondiente.

a) $F'(x) = 1 - 6x$ con $F(0) = 8$

b) $F'(x) = 8x^3 + 12x + 3$ con $F(1) = 6$

c) $F'(x) = 6\sqrt{x} + 5x^{3/2}$ con $F(1) = 10$

d) $F'(x) = 2x - \dfrac{3}{x^4}$ con $F(1) = 3$

e) $F'(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ con $F(0) = 4$

f) $F'(x) = 2e^x - 3\cos(x)$ con $F(\pi) = 0$

12.2 Cálculo de integrales definidas

En el Módulo **11** calculamos **integrales definidas** como un límite de sumas de Riemann para determinar el valor del área comprendida entre la gráfica de una función positiva y el eje x, también para estudiar el movimiento de un objetivo según su velocidad, y también para determinar la cantidad de infección asociada a la patogénesis de una enfermedad infecciosa. El siguiente teorema relaciona el cálculo de las integrales definidas con el cálculo de antiderivadas.

Teorema 12.2.1 — Regla de Barrow. Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Se utiliza regularmente la notación: $F(b) - F(a) = \Delta F = F(x)\Big|_a^b$

Por ejemplo, en el Módulo **11** vimos, usando sumas de Riemann, que

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

Tomando $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ como una antiderivada de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ tendremos, según el Teorema 12.2.1, el mismo resultado

$$\int_0^1 x^2\,dx = F(x)\Big|_0^1 = F(1) - F(0) = \tfrac{1}{3}1^3 - \tfrac{1}{3}0^3 = \tfrac{1}{3}$$

El Teorema 12.2.1 es consistente con lo desarrollado en el Módulo **11** cuando expresamos

$$\Delta p = p(b) - p(a) = \int_a^b v(t)\,dt$$

considerando que $p'(t) = v(t)$. O sea, la función posición de un objeto en movimiento es una antiderivada de la función velocidad del objeto.

Demostración Dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de tamaño $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ tomando los puntos $x_0 (= a), x_1, \ldots, x_n (= b)$. Tomando $F(x)$ una antiderivada cualquiera de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ escribimos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) \underbrace{- F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) + \cdots F(x_3) - F(x_2) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1)}_{\text{Sumamos y restamos varios términos de la forma } F(x_i) \text{ con } 1 \le i \le n-1} - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Considerando que $F(x)$ es continua y derivable en cada intervalo $[x_i, x_{i-1}]$ podemos afirmar que (Teorema del Valor Medio) en cada subintervalo existe un valor x_i^* tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x$$

por lo tanto

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Tomamos límite para $n \to +\infty$ en ambos lados de la igualdad. El miembro de la izquierda es constante respecto de n y el miembro de la derecha corresponde a las sumas de Riemann de la función $f(x)$ por lo que

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

■ **Ejemplo 12.5** Calcularemos $\displaystyle\int_0^3 e^x dx$.

Dado que $F(x) = e^x$ es una antiderivada de e^x en el intervalo $[1, 3]$ podemos calcular

$$\int_0^3 e^x dx = F(3) - F(0) = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19.085$$

■

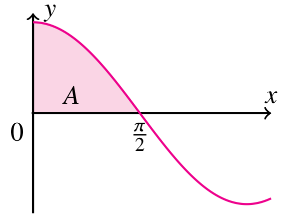


Figura **12.2**: Área comprendida entre la gráfica de la función $\cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

■ **Ejemplo 12.6** Determinaremos el valor del área comprendida entre la gráfica de la función $\cos(x)$ y el eje x en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Dado que la función $f(x) = \cos(x)$ es positiva en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y que $F(x) = \text{sen}(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en el intervalo se puede calcular

$$\text{Área} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = F(\tfrac{\pi}{2}) - F(0) = \text{sen}(\tfrac{\pi}{2}) - \text{sen}(0) = 1$$

■

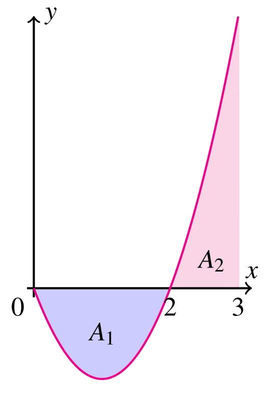


Figura **12.3**: Área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en el intervalo $[0, 3]$.

■ **Ejemplo 12.7** Determinaremos el valor del área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje x en el intervalo $[0, 3]$.

El área que queremos determinar se puede obtener sumando las áreas A_1 y A_2 (ver Figura **12.3**). En el caso de A_1, como la función es negativa en el intervalo $(0, 2)$, y usando $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ como antiderivada de $f(x)$ en el intervalo $[0, 3]$ sabemos que

$$A_1 = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -[F(2) - F(0)] = -\left(\tfrac{1}{3}2^3 - 2^2\right) + \left(\tfrac{1}{3}0^3 - 0^2\right) = \frac{4}{3}$$

Y en el caso de A_2, como la función es positiva en el intervalo $(2, 3)$

$$A_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = F(3) - F(2) = \left(\frac{1}{3}3^3 - 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 - 2^2\right) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

El área de la región será $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

■

Actividad 12.2 Calculen las siguientes integrales definidas

a) $\int_{-1}^{2}(x^3-2x)dx$	*b)* $\int_{-2}^{5}6dx$	*c)* $\int_{1}^{4}(5-2t+3t^2)dt$
d) $\int_{0}^{1}x^{4/5}dx$	*e)* $\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x}dx$	*f)* $\int_{1}^{2}\frac{3}{t^4}dt$
g) $\int_{0}^{2\pi}\cos(\theta)d\theta$	*h)* $\int_{0}^{\pi/4}\sec^2(t)dt$	*i)* $\int_{1}^{9}\frac{2}{x}dx$
j) $\int_{-3}^{-1}\frac{2}{x}dx$	*k)* $\int_{0}^{1}10^x dx$	*l)* $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{6}{1+t^2}dt$

■

12.3 Integral indefinida

Para continuar introduciremos una notación propia y específica para las **antiderivadas** que facilitará el trabajo. La notación usada tradicionalmente es

$$\int f(x)dx$$

para indicar la determinación de antiderivadas de la función $f(x)$ de manera general. O sea,

$$F(x)=\int f(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x)=f(x)$$

Remarcamos la diferencia entre el doble uso del símbolo $\int$ tanto para lo que denominamos **integral definida** como con lo que denominamos **integral indefinida**.

Integral definida	**Integral indefinida**
$\int_a^b f(x)dx$	$\int f(x)dx$
Un número real que se obtiene como límite de las sumas de Riemann para la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.	El conjunto de funciones antiderivadas de $f(x)$. O sea, las que al derivarlas dan $f(x)$.
Por ejemplo,	Por ejemplo,
$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$	$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$

Con esta notación escribimos la Tabla 12.1 con las **primitivas** de las funciones usuales.

La relación

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

siendo $F(x)$ cualquier primitiva de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ generaliza lo que mencionamos para el caso de la posición de un móvil y su relación con la velocidad

$$\int_a^b v(t)dt=p(b)-p(a)$$

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ para $n\neq -1$
$\int e^x\,dx=e^x+C$
$\int a^x\,dx=\frac{1}{\ln(a)}a^x+C$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln(\lvert x\rvert)+C$
$\int \cos(x)dx=\operatorname{sen}(x)+C$
$\int \operatorname{sen}(x)dx=-\cos(x)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan(x)+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\operatorname{arc\,sen}(x)+C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(x)+C$

Tabla 12.1: Tabla de primitivas o integrales indefinidas.

Más generalmente, consideraremos a cualquier magnitud física, química o biológica que se corresponda con una función de $F(x)$ de $\mathbb{R}$ (o algún subconjunto de $\mathbb{R}$) en $\mathbb{R}$ donde la variable independiente es el **tiempo** "t" de tal manera que

$$\Delta F = F(b) - F(a) = \text{ variación de } F \text{ en el intervalo de tiempo } [a, b]$$

$$F'(t) = \text{velocidad instantánea de } F \text{ en el instante } t$$

$$\int_a^b F'(t)dt = \text{Límite de las sumas de Riemman de } F'(t) \text{ en el intervalo } [a, b]$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$$

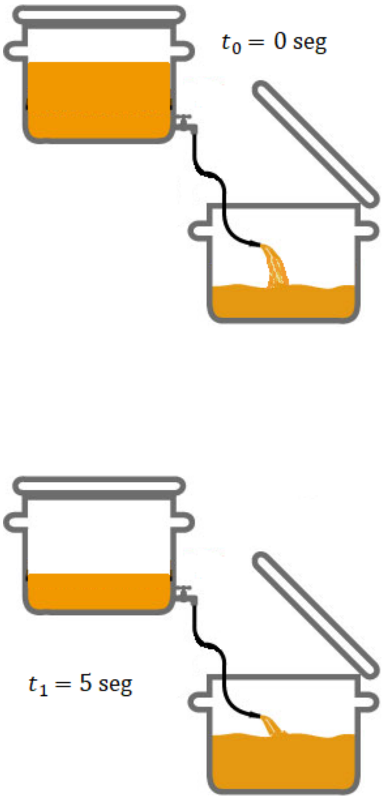


Figura 12.4: Cerveza fluyendo de un tanque a otro.

■ **Ejemplo 12.8** En un proceso de elaboración de cerveza casera se trasvasa el líquido de un recipiente a otro a una velocidad de $V'(t)$ cm^3/seg.

La integral definida

$$\int_0^5 V'(t)dt = \Delta V$$

representa la **variación** en cm^3 del volumen de cerveza que se produjo entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 5$ segundos. ■

Actividad 12.3 En cada caso, indicar qué representa la integral definida planteada:

a) Si $w'(t)$ es la velocidad de crecimiento en cada instante t de un niño en kilos/año. ¿Qué representa $\displaystyle\int_5^{10} w'(t)dt$?

b) En una reacción química, la velocidad de reacción es la derivada de la concentración $[C](t)$ del producto que está reaccionando. ¿Qué representa $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}[C](t)dt$?

c) Se comienza con 100 abejas las cuales aumentan a una velocidad de $n'(t)$ abejas por semana. ¿Qué representa la expresión $100 + \displaystyle\int_0^{120} n'(t)dt$? ■

Actividad 12.4 Una colonia de bacterias incrementa su tamaño a una velocidad de 4.05×6^t bacterias por hora. Considerando que inicialmente la población tuvo 46 bacterias, encuentren el tamaño de la población 4 horas más tarde. ■

Actividad 12.5 La función $f(t) = -t(t-21)(t+1)$ modela la patogénesis del sarampión en un individuo infectado en función del tiempo t medido en días. Determinar la cantidad de infección que hay en el individuo desde el día 0 (entrada del virus al cuerpo) hasta el día 12 (aparición de los síntomas). ■

12.4 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema 12.2.1 permite calcular la **integral definida** de una función continua a través de alguna antiderivada. Pero, ¿existen siempre antiderivadas? El Teorema Fundamental del Cálculo que se presenta a continuación define una función de manera explícita que cumple ser una antiderivada de la función original bajo la condición de que se trate de una función continua.

Teorema 12.4.1 — Teorema Fundamental del Cálculo. Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ entonces la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{para } a \leq x \leq b \tag{12.1}$$

es una antiderivada de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. O sea, $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$

En términos de la Actividad 12.1, la función $F(x)$ definida por la ecuación **12.1** es la única antiderivada de $f(t)$ que cumple $F(a) = 0$.

La función $F(x)$ se define como la **integral definida** de la función $f(t)$ en el intervalo $[a, x]$. De modo que la variable x (variable independiente de F) representa el borde derecho en el que se calcula la integral definida. Para cada valor de x fijo,

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

es un número real; de modo que haciendo variar x en el intervalo $[a, b]$ se obtienen los distintos valores de $F(x)$.

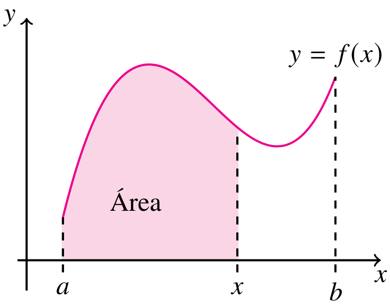


Figura **12.5**: Área debajo de la gráfica de la función $f(x)$ sobre el eje x en el intervalo $[a, x]$.

Si $f(t)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ representa el valor del **área** debajo de la gráfica de la función f en el intervalo $[a, x]$ como se ve en la Figura **12.5**. En este caso, si quisiéramos calcular la derivada de $F(x)$ en algún x deberíamos evaluar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Si $\Delta x > 0$, entonces $F(x + \Delta x) - F(x)$ representa el área sombreada en la Figura **12.6**: el área debajo de la gráfica de la función f en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Para valores pequeños de Δx, se puede aproximar con el área del rectángulo de base Δx y altura $f(x)$

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x)\Delta x$$

o sea,

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

y tomando límite para $\Delta x \to 0^+$ se obtiene

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

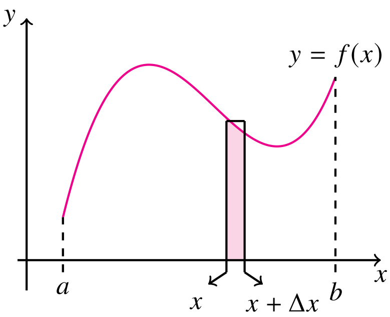


Figura **12.6**: Área debajo de la gráfica de la función $f(x)$ sobre el eje x en el intervalo $[a, x]$.

Un razonamiento similar sirve para el caso que $\Delta x < 0$ y en el caso general que $f(x)$ no sea positiva.

El **Teorema Fundamental del Cálculo** se escribe, en la notación de Leibniz como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

en el caso que $f(t)$ sea continua.

■ **Ejemplo 12.9** Consideremos $f(x) = e^{x^2}$. Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ por lo tanto, por el Teorema 12.4.1 la función

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y además $F'(x) = e^{x^2}$.
Para complejizar la situación podemos tomar otra función $g(x) = x^3 + 5$ de tal manera de **componerlas** en las dos opciones posibles

$$(F \circ g)(x) \qquad\qquad \text{o} \qquad\qquad (g \circ F)(x)$$

En el primer caso es

$$(F \circ g)(x) = F\left(g(x)\right) = \int_0^{x^3+5} e^{t^2}\,dt$$

y por lo tanto

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)).g'(x) = e^{(x^3+5)^2}.3x^2$$

En el segundo caso es

$$(g \circ F)(x) = g\left(F(x)\right) = \left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^3 + 5$$

y por lo tanto

$$(g \circ F)'(x) = g'(F(x)).F'(x) = 3\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2 .e^{x^2}$$

■

Actividad 12.6 Usen el Teorema Fundamental del Cálculo para calcular las derivadas de las siguientes funciones.

a) $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$ *b)* $g(x) = \displaystyle\int_3^x e^{t^2-t}\,dt$

c) $g(y) = \displaystyle\int_2^y t^2 \operatorname{sen}(t)\,dt$ *d)* $g(r) = \displaystyle\int_0^r \sqrt{x^2+4}\,dx$

e) $g(x) = \displaystyle\int_x^0 \cos(t^2)\,dt$ ⇐ Usar la propiedad $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

f) $g(x) = \displaystyle\int_2^{1/x} \arctan(t)\,dt$ ⇐ Revisar el Ejemplo 12.9

g) $g(u) = \displaystyle\int_0^{\tan(u)} \sqrt{t+\sqrt{t}}\,dt$ *h)* $g(x) = \displaystyle\int_{e^x}^0 \operatorname{sen}^3(t)\,dt$

■

12.5 Métodos de integración

Ya vimos que una integral definida es un número real que surge al tomar el límite de ciertas sumas de Riemann. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que una integral definida de una función continua puede calcularse fácilmente si somos capaces de encontrar una antiderivada de la función. En general, encontrar antiderivadas resulta más difícil que encontrar derivadas. Sin embargo, es importante poder hallar antiderivadas y es por eso que aprenderemos algunas técnicas para calcularlas.

Hasta ahora hemos podido encontrar antiderivadas de funciones que reconocemos claramente como derivadas. Pero no hemos visto todavía fórmulas que nos permitan hallar integrales indefinidas como la siguiente

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx. \tag{12.2}$$

12.5.1 Regla de sustitución

En esta sección comenzaremos a desarrollar técnicas más generales para encontrar antiderivadas. La primera técnica de integración que desarrollaremos se obtiene al invertir el proceso que llamamos **regla de la cadena**.

Para hallar la integral 12.2 usamos una estrategia de resolución de problemas que consiste en **cambiar** o **sustituir** la variable:

Cambiamos de la variable x a una nueva variable u

En este caso, tomaremos como u al radicando que se encuentra dentro de la raíz en 12.2:

$$u = 1 + x^2.$$

Entonces $\dfrac{du}{dx} = 2x$. Utilizamos la notación de Leibniz porque nos permite "manipular" las expresiones du y dx como si fueran expresiones algebraicas separadas de modo que queda

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad du = 2x\,dx$$

Los símbolos dx y du se denominan generalmente **diferenciales**. La forma general de los diferenciales proviene de escribir

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

equivalente a

$$df = f'(x)dx$$

Reacomodando la integral 12.2 tenemos

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Comprobamos el resultado obtenido calculando la derivada usando la Regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C\right] = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2-1}\;2x = 2x\,(1+x^2)^{1/2} = 2x\sqrt{1+x^2}.$$

En general, este método funciona para integrales que podamos escribir en la forma

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx.$$

Observemos que si $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\,g'(x).$$

Con el "cambio de variable" o "sustitución" $u = g(x)$, obtenemos

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Teorema 12.5.1 — Regla de sustitución. Sea $g : I \longrightarrow J$, donde I y J son dos intervalos. Si $g'(x)$ es continua en I y f es continua en J, entonces

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \int f(u)\, du \qquad \Leftarrow \text{Para } \textbf{integrales indefinidas}$$

Y para cualesquiera a, b pertenecientes a I

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \qquad \Leftarrow \text{Para } \textbf{integrales definidas}$$

Hemos demostrado la regla de sustitución para integración usando la regla de la cadena para derivación. Observemos que si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\, dx$.

En los siguientes ejemplos veremos varias maneras de calcular integrales indefinidas e integrales definidas utilizando la **regla de sustitución**. Principalmente, en el caso de **integrales definidas**, los ejemplos se desarrollan de manera diferente en cada instancia:

- Aplicar la **regla de sustitución** para integrales definidas calculando $g(a)$ y $g(b)$.
- Calculando en primer lugar una primitiva de la función involucrada, con la **Regla de Sustitución** para integrales indefinidas, y luego con ella, aplicar la **Regla de Barrow**.

■ **Ejemplo 12.10** Encontremos, usando la regla de sustitución, $\displaystyle\int x^3 \cos(x^4 + 7)\, dx$.

Sustituimos $u = x^4 + 7$, como $du = 4x^3\, dx$, que, salvo por el factor constante 4 que aparece multiplicando, el resto se encuentra presente en la integral. Así, usando $x^3\, dx = \dfrac{1}{4} du$ y la regla se sustitución, tenemos que

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos(x^4 + 7)\, dx &= \int \cos(u)\, \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int \cos(u)\, du \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u) + C \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(x^4 + 7) + C. \end{aligned}$$

Observar que en el último paso hemos regresado a la variable original x. ■

Cuando se usa una sustitución en una integral definida, debemos poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx sino también los límites de integración. Los nuevos límites son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

■ **Ejemplo 12.11** Calculemos la integral $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$ usando la regla de sustitución para integrales definidas.

Usando la sustitución $u = 2x + 1$, $\dfrac{1}{2} du = dx$. Para hallar los nuevos límites de integración vemos que:

cuando $x = 0$, $u = 2.0 + 1 = 1$ y cuando $x = 4$, $u = 2.4 + 1 = 9$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{2x+1}dx &= \int_1^9 \frac{1}{2} \sqrt{u}\; du \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^9 \\ &= \frac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

■

La **regla de la sustitución** logra transformar una integral relativamente complicada en una integral más sencilla. En el Ejemplo 12.10, transformamos la integral $\int x^3 \cos(x^4+7)\,dx$ por la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos(u)\,du$.

La principal dificultad con la **regla de la sustitución** es la de encontrar una sustitución apropiada. En ocasiones, llegaremos a la sustitución correcta después de varios intentos, no es un asunto trivial, es por eso que si la sustitución no funciona tenemos que intentar otra.

■ **Ejemplo 12.12** Encontraremos, usando una sustitución conveniente, $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.
Al tomar $u = 1-4x^2$, $du = -8xdx$, se tiene $-\frac{1}{8}du = xdx$, y luego se tiene que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx &= -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}du\\ &= -\tfrac{1}{8}2\,u^{1/2}+C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 12.13** Calculemos $\int_{-2}^{1} e^{6x}\,dx$.
En primer lugar determinaremos una primitiva de e^{6x} en el intervalo $[-2,1]$ desarrollando la integral indefinida

En este ejemplo, primero calculamos la integral indefinida y luego usamos la **Regla de Barrow**.

$$\int e^{6x}dx = \frac{1}{6}\int e^u du = \tfrac{1}{6}e^u + C = \tfrac{1}{6}e^{6x}+C.$$

Hemos usado la sustitución $u = 6x$, con lo que $du = 6dx$, y $\frac{1}{6}du = dx$.
Para calcular la **integral definida** usamos una de las primitivas encontradas: $\frac{1}{6}e^{6x}$ de modo que

$$\int_{-2}^{1} e^{6x}dx = \tfrac{1}{6}e^{6x}\Big|_{-2}^{1} = \tfrac{1}{6}e^{6} - \tfrac{1}{6}e^{-12}$$

■

■ **Ejemplo 12.14** Calculemos $\int \tan(x)dx$. Si reescribimos a la $\tan(x)$ como $\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$,

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}dx.$$

Si hacemos la sustitución $u = \cos(x)$, tenemos que $-du = \operatorname{sen}(x)dx$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \tan(x)dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{1}{u}du\\ &= -\ln(|u|)+C = -\ln(|\cos(x)|)+C.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 12.15** Para calcular la $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$ usaremos la sustitución $u = \ln(x)$ porque $du = \frac{1}{x}dx$.
Cuando $x = 1$, $u = \ln(1) = 0$ y cuando $x = e$, $u = \ln(e) = 1$. Por lo tanto,

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_1^e \ln(x)\frac{1}{x}dx = \int_0^1 u du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

■

Actividad 12.7 Calculen las siguientes integrales usando la sustitución que se indica

a) $\int e^{-x}dx$ tomando $u = -x$.

b) $\int x^3(2 + x^4)^5 dx$ tomando $u = 2 + x^4$.

c) $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}dx$ tomando $u = x^3 + 1$.

d) $\int \cos^3(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta$ tomando $u = \cos(\theta)$.

■

Actividad 12.8 Calculen las siguientes integrales indefinidas. Deben analizar qué sustitución es conveniente realizar en cada caso. Utilicen los ejemplos anteriores para analizar las opciones posibles.

a) $\int x\,\mathrm{sen}\left(x^2\right) dx$

b) $\int x^2(x^3 + 5)^9 dx$

c) $\int \frac{(\ln(x))^2}{x}dx$

d) $\int e^x \cos(e^x)dx$

e) $\int \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

f) $\int \frac{x^2}{x^3 + 1}dx$

g) $\int \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta$

h) $\int \frac{\arctan(x)}{1 + x^2}dx$

■

Actividad 12.9 Calculen las siguientes integrales definidas utilizando alguna sustitución adecuada.

a) $\int_0^1 \cos(\pi t/2)dt$

b) $\int_0^1 (3t - 1)^{50}dt$

c) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

d) $\int_2^4 \frac{x}{1 - x^2}dx$

■

12.5.2 Integración por partes

El **método de integración por partes** se basa en la regla de derivación de un producto de funciones. Si f y g son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Usando la notación para integrales indefinidas esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

o bien,

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x).$$

Reacomodando la ecuación llegamos a que

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

Teorema 12.5.2 — Regla de integración por partes. Si f y g son funciones cuyas derivadas son continuas en un intervalo I entonces

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \qquad \Leftarrow \text{Para } \textbf{integrales indefinidas}$$

Y para cualesquiera a, b pertenecientes al intervalo I

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx \qquad \Leftarrow \text{Para } \textbf{integrales definidas}$$

Usando la notación de **diferenciales** se escribe la fórmula de integración por partes de la siguiente manera: sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$, y

$$\int \underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{g'(x)dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{g(x)}_{v} - \int \underbrace{g(x)}_{v}\,\underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

El **método de integración por partes** requiere la presencia de un producto de dos expresiones, una de las cuales es $f(x)$ y la otra es $g'(x)$. Nos corresponde a nosotros (los que estemos tratando de calcular la integral) decidir cuál de las dos expresiones es $f(x)$ (que luego deberemos derivar) y cuál es $g'(x)$ (a la que debemos calcular una antiderivada).

$$f(x) \xrightarrow{\text{Derivando}} f'(x) \qquad\qquad g(x) \xrightarrow{\text{Calculando una primitiva}} \int g(x)$$

■ **Ejemplo 12.16** Encontremos $\int x\,\text{sen}(x)\,dx$ usando el método de integración por partes.

Tomamos como $f(x) = x$ y como $g'(x) = \text{sen}(x)$.
Luego, como $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos(x)$,

$$\begin{aligned}\int x\,\text{sen}(x)dx &= f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx\\ &= x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))1\,dx\\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)dx\\ &= -x\cos(x) + \text{sen}(x) + C\end{aligned}$$

Verificamos que hallamos bien la primitiva derivando (usamos la regla del producto):

$$(-x\cos(x) + \text{sen}(x) + C)' = -\cos(x) + x\,\text{sen}(x) + \cos(x) + 0 = x\,\text{sen}(x)$$

■

C Al usar la fórmula de integración por partes transformamos la integral original en una parte que ya está "integrada" y otra integral nueva con la esperanza que sea más sencilla que la anterior.

En el Ejemplo 12.16, empezamos con $\int x\,\text{sen}(x)dx$ y lo expresamos en términos de una integral $\int \cos(x)dx$ que se calcula usando la tabla de primitivas **12.1**.

Si nuestra elección inicial hubiese sido $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g'(x) = x$, entonces tendríamos $f'(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, de modo que la integración por partes queda

$$\int x\,\text{sen}(x)dx = \text{sen}(x)\,\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\cos(x)dx$$

Si bien la fórmula está bien utilizada, la nueva $\int x^2\cos(x)dx$ es una integral más difícil de calcular que la original. Cuando se decide sobre una opción para $f(x)$ y $g'(x)$, por lo general tratamos de escoger que $f(x)$ sea una función que se haga más sencilla cuando se derive (o al menos no más complicada) mientras $g'(x)$ se pueda integrar fácilmente para obtener $g(x)$.

■ **Ejemplo 12.17** Calculemos ahora $\int_1^e \ln(x)dx$ usando la fórmula de integración por partes para integrales definidas con la notación u y v. En este caso no tenemos muchas opciones, llamamos: $u = \ln(x)$ y $dv = dx$. Así, $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = x$.

Al integrar por partes,

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)dx &= x\,\ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}dx = e\ln(e) - 1\,\ln(1) - \int_1^e 1\,dx\\ &= e - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

En este ejemplo, la integración por partes es efectiva porque la derivada de la función $f(x) = \ln(x)$ es más sencilla que $f(x)$. ■

■ **Ejemplo 12.18 — Doble integración por partes.** Encontremos $\int t^2 e^t \, dt$. Observemos en este caso que t^2 se hace más sencilla cuando la derivamos y que e^t no cambia cuando la derivamos o integramos, por lo que tomaremos

$$u = t^2 \qquad dv = e^t \, dt \qquad \Longrightarrow du = 2t dt \qquad v = e^t$$

y la integral queda

$$\int t^2 e^t \, dt \;=\; t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt \tag{12.3}$$

En 12.3 nos sigue apareciendo una integral para resolver, $\int t e^t \, dt$, que si bien no es una integral que podamos resolver usando la tabla de primitivas, podemos calcularla usando nuevamente integración por partes. En este caso, tomaremos $u = t$ y $dv = e^t \, dt$. Luego tenemos que $du = dt$, $v = e^t$, y

$$\int t e^t \, dt = t e^t - \int e^t \, dt = t e^t - e^t + C.$$

Si reemplazamos eso en la ecuación 12.3

$$\begin{aligned} \int t^2 e^t \, dt &= t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt \\ &= t^2 e^t - 2(t e^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde} \quad C_1 = -2C. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 12.19 — Integrales cíclicas.** Calculemos ahora $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$.

En este caso, si bien ni e^x ni $\operatorname{sen}(x)$ se vuelven más sencillas cuando las derivamos, escogeremos $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen}(x)dx$ de todas formas. Entonces $du = e^x dx$ y $v = -\cos(x)$, de modo que la integración por partes nos da

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx \;=\; -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx. \tag{12.4}$$

En 12.4 nos aparece $e^x \cos(x)dx$ que no resulta más sencilla que la original pero al menos no es más difícil. Lo que haremos será integrar nuevamente por partes pero esta vez usamos $u = e^x$ y $dv = \cos(x)dx$. Entonces $du = e^x dx$, $v = \operatorname{sen}(x)$, y

$$\int e^x cos(x) dx \;=\; e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x) dx \tag{12.5}$$

A primera vista, parece como si no hubiéramos logrado nada porque hemos llegado a $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$, que es donde empezamos. Sin embargo, si ponemos la ecuación 12.5 en la ecuación 12.4 tendremos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)dx.$$

Reagrupando $\int e^x \operatorname{sen}(x)dx$, nos queda

$$2\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x),$$

por lo tanto,

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = \frac{1}{2}e^x[-\cos(x) + \operatorname{sen}(x)] + C.$$

■

■ **Ejemplo 12.20 — Farmacocinética de la aspirina.** La función

$$C(t) = 32t^2 e^{-4.2\,t}$$

modela la concentración promedio de aspirina en bajas dosis en el torrente sanguíneo según datos extraídos de 10 voluntarios en una investigación. La variable t está medida en horas y C está medida en $\mu g/mL$. Utilizaremos integración por partes para calcular $\int_0^2 C(t)dt$ que representa la **droga disponible en el cuerpo** al trancurrir 2 horas. Observemos que cuando derivamos t^2 se vuelve más simple. No sucede lo mismo con $e^{-4.2\,t}$. Por lo tanto, proponemos llamar

$$u = 32t^2 \qquad dv = e^{-4.2\,t}dt \qquad \Longrightarrow \qquad du = 64t \qquad v = -\tfrac{1}{4.2}e^{-4.2\,t}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_0^2 32t^2 e^{-4.2\,t}dt &= -\frac{32}{4.2}t^2 e^{-4.2\,t}\Big|_0^2 - \int_0^2 -\frac{64}{4.2}te^{-4.2\,t}dt \\
&= -\frac{32}{4.2}4e^{-8.4} + \frac{64}{4.2}\int_0^2 te^{-4.2\,t}dt
\end{aligned}$$

La integral que obtuvimos, $\int_0^2 te^{-4.2\,t}dt$, debe ser resuelta nuevamente con integración por partes con $u = t$ y $dv = e^{-4.2\,t}dt$, tenemos que $du = dt$ y $v = -\dfrac{1}{4.2}e^{-4.2\,t}$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 te^{-4.2\,t}dt &= -\frac{t}{4.2}e^{-4.2\,t}\Big|_0^2 + \frac{1}{4.2}\int_0^2 e^{-4.2\,t}dt \\
&= -\frac{2}{4.2}e^{-8.4} + \frac{1}{4.2}\left[\frac{e^{-4.2\,t}}{-4.2}\right]\Big|_0^2 = -\frac{2}{4.2}e^{-8.4} - \frac{e^{-8.4}-1}{(4.2)^2}.
\end{aligned}$$

Si reemplazamos este valor obtenemos que

$$\int_0^2 C(t)dt = -\frac{32}{4.2}4e^{-8.4} + \frac{64}{4.2}\left(-\frac{2}{4.2}e^{-8.4} - \frac{e^{-8.4}-1}{(4.2)^2}\right) \approx 0.855159$$

■

Actividad 12.10 Calculen usando el método de integración por partes. En los casos de integrales indefinidas, verificar siempre las primitivas obtenidas derivando la respuesta.

a) $\displaystyle\int x\,\cos(5x)dx$ *b)* $\displaystyle\int x^2\,\ln(x)dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(3x)dx$ *d)* $\displaystyle\int \arctan(x)dx$

e) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ *f)* $\displaystyle\int 2^x\,\cos(x)dx$

g) $\displaystyle\int_2^1 \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ *h)* $\displaystyle\int (\ln(x))^2 dx$

12.5.3 Integración por fracciones simples

El **método de integración por fracciones simples** se utiliza para calcular las integrales definidas o integrales indefinidas de funciones **racionales**

$$f(x) = \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}}$$

considerando siempre intervalos en los que la función sea continua.

En estos casos, se toma como base **tres** funciones racionales, las más simples, cuyas primitivas se determinan usando la tabla de primitivas 12.1. Considerando $n > 1$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|)+C \qquad \int \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}}+C \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)+C$$

O más generalmente, a cualquier número real, y $b > 0$

(I) $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln(|x+a|) + C$ **(II)** $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x+a)^{n-1}}+C$

(III) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+b}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right) + C$ **(IV)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\ln(|x^2+a|) + C$

Estas últimas integrales indefinidas se calculan por sustitución. En (**I**) y (**II**) corresponde tomar $u = x + a$; en (**III**) corresponde tomar $u = \frac{x}{\sqrt{b}}$; y en (**IV**) se toma $u = x^2 + a$.

El método consiste en "descomponer" funciones racionales más complejas como **combinaciones lineales** de estas **fracciones simples**. El método es netamente algebraico, en el sentido que se busca manipular algebraicamente las expresiones para encontrar expresiones equivalentes que puedan integrarse fácilmente con estas fracciones simples.

No desarrollaremos el método en su completitud que contempla todas las maneras en que se puede factorizar un polinomio según las multiplicidades de sus raíces.

■ **Ejemplo 12.21** Para encontrar $\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\, dx$ debemos, en primer lugar, determinar la **forma estándar** de la función racional $f(x) = \frac{x^3 + x}{x - 1}$ dado que el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador.
Realizando la división entre los polinomios $x^3 + x$ con $x - 1$ obtenemos

$$\frac{x^3 + x}{x - 1} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\, dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2\ln(|x - 1|) + C$$

■

■ **Ejemplo 12.22** Para calcular $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$ ya tenemos la función en su forma estándar porque el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador. **Factorizaremos** el denominador,

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x - 1)(x + 2)$$

Como quedaron 3 factores distintos proponemos descomponer en 3 fracciones:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

en las que faltaría determinar los valores de las constantes A, B y C. Existen varios métodos para determinar estos valores. En nuestro caso multiplicaremos la ecuación por el denominador completo $x(x - 1)(x + 2)$ (es más sencillo si se encuentra factorizado)

$$x^2 + 2x - 1 = A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 1)$$

y expandiendo todo lo posible el miembro derecho (son varias cuentas usando las propiedades distributivas y agrupando los x^2, x y los términos independientes)

$$x^2 + 2x - 1 = (A + B + C)x^2 + (A + 2B - C)x - 2A$$

Esta última ecuación representa una igualdad entre el polinomio: los coeficientes correspondientes a los distintos monomios deben coincidir. O sea, corresponde resolver el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} 1 &= A + B + C \\ 2 &= A + 2B - C \\ -1 &= -2A \end{cases}$$

Resolvemos este sistema (no hacemos las cuentas) y obtenemos

$$A = \tfrac{1}{2}, \quad B = \tfrac{2}{3} \quad \text{y} \quad C = -\tfrac{1}{6}$$

que nos permite plantear la igualdad

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \frac{1/2}{x} + \frac{2/3}{x-1} + \frac{-1/6}{x+2}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x} + \frac{2/3}{x-1} + \frac{-1/6}{x+2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(|x|) + \tfrac{2}{3}\ln(|x-1|) - \tfrac{1}{6}\ln(|x+2|) + C$$

■

■ Ejemplo 12.23 Para calcular $\int_2^4 \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$ notamos primero que la función $\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$ es continua en el intervalo $[2,4]$. Utilizaremos 3 fracciones de la siguiente forma

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+1}$$

donde quedan para determinar el valor de las constantes A, B y C.
La presencia del factor x^2+1 (cuadrático sin raíces reales) nos indica la necesidad de usar dos fracciones distintas para él. Multiplicando ambos miembros por $(x-1)(x^2+1)$ queda

$$2 = A(x^2+1) + Bx(x-1) + C(x-1)$$

por lo que se debe cumplir que $2 = (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C$
O sea,

$$\begin{cases} 0 &= A+B \\ 0 &= C-B \\ 2 &= A-C \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $A=1$, $B=-1$ y $C=-1$; por lo que

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1}$$

La integral se calcula entonces como

$$\int_2^4 \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \ln(|x-1|) - \tfrac{1}{2}\ln(|x^2+1|) - \arctan(x)\Big|_2^4 \approx 0.268056$$

■

Actividad 12.11 Calculen las siguientes integrales estudiando en primer lugar la forma estándar y luego descomponiendo en fracciones simples.

a) $\int \frac{x}{x-1}\,dx$ *b)* $\int \frac{2}{x^2+x}\,dx$ *c)* $\int \frac{x}{x^2+x-2}\,dx$

d) $\int \frac{x^2}{x+4}\,dx$ *e)* $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx$

■