UNIDAD 3

DERIVADAS Y MÉTODOS DE DERIVACIÓN

Objetivos

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Identificará cuándo una función es derivable y cuándo no.
- Utilizará el método de derivación adecuado a la función que se trate.
- Resolverá ejercicios por medio de derivadas que involucren funciones algebraicas, compuestas o trascendentes.
- Calculará derivadas de orden superior.

Introducción

Una de las metas fundamentales de este capítulo es entender el significado matemático de curva suave y continua; es decir, sin cambios bruscos de dirección. Las curvas de esta naturaleza se caracterizan por generar rectas tangentes únicas en cada uno de los puntos que las conforman, empleando los límites para calcular las pendientes de dichas rectas tangentes. En diversos problemas físicos estas pendientes se interpretan como razones de cambio instantáneo, a saber, la velocidad y la aceleración.

3.1. Derivada de una función en un punto

El problema de la tangente a una curva es determinar la pendiente de la recta tangente en un punto $(x, f(x))$ de dicha curva. En esta unidad estudiaremos este problema con todo detalle. Para nuestro estudio requerimos del concepto de *derivada*. Con la finalidad de entender este concepto iniciaremos formulando su definición, para luego plantear, de forma explícita, su interpretación geométrica y física, así como el entendimiento de la formulación adecuada para obtener las derivadas de diferentes funciones. Concluiremos con el estudio de las derivadas de orden superior.

Definición. Decimos que una función $f(x)$ es derivable en un punto si existe el limite $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ y se le llama derivada de la función $y = f(x)$

Existen diferentes notaciones para designar la derivada de la función y con respecto a x, por ejemplo:

$$f'(x),\ f_x,\ y',\ \frac{dy}{dx},\ D_x y.$$

Además existe la notación de Newton para cuando la función y ó x se deriva con respecto a la variable del tiempo:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Ejemplo 1

Obtén la derivada de la función $f(x) = 7x - 5$.

Solución

Cuando el valor de la variable x es igual a $(x+\Delta x)$, se tiene que:

$$f(x + \Delta x) = 7(x+\Delta x) - 5 = 7x + 7\Delta x - 5; \text{ como } f(x) = 7x - 5.$$

Entonces, dado que $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, se tiene que:

$$\Delta y = 7x + 7\Delta x - 5 - (7x - 5) = 7\Delta x$$

Ahora bien $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{7\Delta x}{\Delta x} = 7$

Por consiguiente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 7 = 7$$

Así que $f'(x) = 7$ para todos los números reales x.

Por lo tanto, $f(x) = 7x - 5$ es derivable y su derivada es igual a 7.

Ejemplo 2

Calcula la derivada de la función $f(x) = x^2$.

a) En un punto cualquiera x
b) En el punto $x = 4$

Solución

a) Cuando el valor del argumento x es igual a $(x+\Delta x)$, se tiene que:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2; \text{ como } f(x) = x^2.$$

Entonces $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ es:

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Ahora bien: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

Por consiguiente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Así que $f'(x) = 2x$ en un punto cualquiera.

b) Por lo tanto, para $x = 4$ obtenemos:

$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8.$

Ejemplo 3

Halla la derivada de la función $y = \dfrac{1}{x}$

Solución

Como en los dos ejemplos anteriores, tendremos que:

$\dfrac{1}{x + \Delta x}$, lo cual implica que:

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

Ahora bien: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x(x + \Delta x)}$

Por lo que: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[-\dfrac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\dfrac{1}{x^2}$

Así que: $y' = -\dfrac{1}{x^2}$

De los ejemplos anteriores se observa que para encontrar la derivada de una función dada $y = f(x)$, con base en la definición general de derivada, es necesario:

1. Dar al argumento x un incremento Δx y calcular el valor incrementado de la función:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

2. Encontrar el incremento correspondiente de la función:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3. Hallar la razón del incremento de la función respecto al incremento del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. Calcular el límite de la razón mencionada, cuando $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A este proceso también se le llama derivación por cuatro pasos, el cual nos será de mucha utilidad para encontrar las derivadas fundamentales de algunas funciones en las secciones posteriores.

3.1.1. Interpretación geométrica y física de la derivada

Una vez definido el concepto de derivada de una función en un punto x, daremos a la derivada la interpretación *geométrica***,** que también es importante. Para ello es necesario definir la *tangente* a una curva en un punto x dado.

Interpretación geométrica de la derivada. Examinemos la función $f(x)$ y la curva correspondiente, $y = f(x)$ en el sistema de coordenadas rectangulares, como se muestra en la figura 3.1.

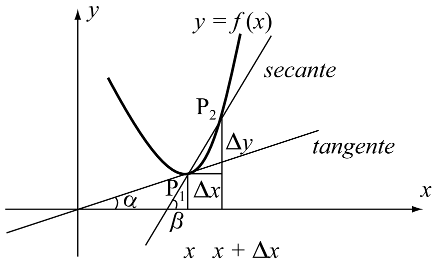


Figura 3.1

A cierto valor de x le corresponde un valor de la función $y = f(x)$. A los valores dados de x y y les corresponde un punto $P_1\,(x, y)$ en la curva. Dando a la variable x un incremento Δx, al nuevo valor $x + \Delta x$ le corresponde un valor incrementado de la función $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. A este último le corresponde en la curva el punto $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$. La recta secante que pasa por los puntos P_1 y P_2 forma un ángulo β con el eje x. Ahora bien, la razón del incremento de la función respecto al incremento de la variable x, de la figura 3.1 es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta$$

Al hacer que Δx tienda a cero, el punto P_2 se desplazará a lo largo de la curva aproximándose al punto P_1 ya que la secante girará alrededor del punto P_1; asimismo, el ángulo β variará al modificar Δx. Así, cuando $\Delta x \to 0$, el ángulo β tenderá al ángulo α, que es el ángulo que forma la recta tangente, y éste será precisamente la tangente que se busca, luego entonces, la tangente del ángulo α es:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Por lo tanto:

$f'(x) = \tan \alpha = m$, donde m es la pendiente de la recta tangente a la curva.

Es decir, el valor de la derivada $f'(x)$ correspondiente al valor dado del argumento x, será igual a la tangente del ángulo formado por la dirección positiva del eje x y la curva de la función $f(x)$ en el punto correspondiente $P_1\,(x, y)$.

Ejemplo 4

Calcula las pendientes de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en los puntos: $P_1(2, 4)$ y $P_2\,(-1, 1)$.

Solución

En virtud del ejemplo 2, se tiene que: $y' = 2x$; ahora bien, sean α_1 y α_2 los ángulos de inclinación de las rectas que pasan por los puntos P_1 y P_2, respectivamente, entonces:

$\tan \alpha_1 = y'|_{x=2} = 4$; asimismo: $\tan \alpha_2 = y'|_{x=-1} = -2$

Ya que $\tan \alpha = m$, se tiene que: $m_1 = 4$ y $m_2 = -2$.

Ejemplo 5

Determina la pendiente de las tangentes a la curva $y = \dfrac{1}{x}$ en diferentes puntos:

a) Cuando $x = 1/2$

b) Cuando $x = 1$

Solución

En virtud del ejemplo 3, se tiene que $y' = -1/x^2$

a) $\tan \alpha_1 = y'|_{x=1/2} = -4$; entonces: $\tan \alpha_1 = -4$

b) $\tan \alpha_2 = y'|_{x=1} = -1$; entonces: $\tan \alpha_2 = -1$

Para entender y definir adecuadamente la *interpretación física* de la derivada es necesario examinar el movimiento de un cuerpo o partícula, considerándolo en adelante como un *punto móvil*, esto es, olvidándonos de sus dimensiones y configuración. La distancia r que recorre el móvil en un determinado tiempo t, partiendo de un punto y un tiempo inicial conocido, se puede expresar mediante la función $r = f(t)$, que indica cómo es que la posición depende del tiempo t. Así que analicemos con todo detalle un caso general de un punto en movimiento rectilíneo, que puede ser ejemplificado como se muestra a continuación.

Interpretación física de la derivada. Supongamos que en un instante t dado un móvil se encuentra a una distancia r de la posición inicial R_0 y unos instantes después, $t + \Delta t$, se encontrará en la posición R, a la distancia $r + \Delta r$ de la posición inicial, como se observa en la figura 3.2.

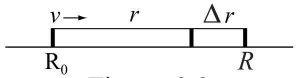


Figura 3.2

Por consiguiente, en este intervalo de tiempo Δt el espacio recorrido r ha cambiado en una magnitud Δr. Se dice en este caso que en el intervalo de tiempo Δt la magnitud r adquirió un incremento Δr.

La razón del incremento en la posición Δr respecto del incremento del tiempo Δt representa la velocidad media del punto móvil durante el tiempo Δt, esto es:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Sin embargo, la velocidad media no puede caracterizar, en todos los casos, con la debida precisión la rapidez del desplazamiento del móvil en el momento t. Así, por ejemplo, si al inicio del intervalo Δt el móvil se desplaza con mayor rapidez, mientras que al final lo hace lentamente, la velocidad media no podrá reflejar estas peculiaridades del movimiento del punto y mostrarnos una correcta idea de la velocidad real de su movimiento en el instante t. Para expresar la velocidad real con mayor precisión, sirviéndose de la velocidad media, es necesario tomar un intervalo de tiempo Δt mucho menor y emplear límites.

El límite hacia el cual tiende la velocidad media, cuando $\Delta t \to 0$, caracteriza la velocidad del móvil en el instante t. Este límite se llama **velocidad del movimiento en el instante dado** o **velocidad instantánea**, esto es:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Ahora bien, como $\Delta r = f(t + \Delta t) - f(t)$, entonces la velocidad instantánea también se puede expresar de la siguiente forma:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

De este modo se observa que el concepto de velocidad de movimiento no uniforme está estrechamente unido al de límite. Sólo a través del concepto de límite se puede determinar **físicamente** la velocidad del movimiento no uniforme. Además de esta última ecuación se deduce que la velocidad v no depende del incremento de tiempo Δt, sino del valor t y del carácter de la función $f(t)$.

Ejemplo 6

Halla la velocidad del movimiento con aceleración uniforme en cualquier instante t y en uno definido para $t = 3$ segundos, si el espacio recorrido se expresa en función del tiempo mediante la fórmula siguiente: $r = \frac{1}{2}gt^2$

Solución

En el instante t se tiene que: $r = \frac{1}{2}gt^2$, y en el instante $t + \Delta t$ tendremos:

$$r + \Delta r = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)$$

Por lo que: $\Delta r = \frac{1}{2}g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2}gt^2 = gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$

Ahora bien: $\dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dfrac{gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t$

De la definición de velocidad en un instante t se tiene:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[gt + \frac{1}{2}g\Delta t \right] = gt$$

Así que la velocidad en un instante t cualquiera es $v = gt$ y cuando $t = 3$ segundos. Se evalúa, utilizando el hecho de que $g = 9.8\ m/s^2$, de la siguiente forma:

$\boldsymbol{v}\,|_{\,t=3} = g\,(3) = 29.4\ m/s$

Ejercicio 1

1. Halla y' para las funciones siguientes, trabajando directamente con la definición de derivada:

a) $y = \sqrt{x}$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2. Calcula las tangentes de ángulos de inclinación de las rectas tangentes a las curvas siguientes:

a) $y = x^2$;   cuando $x = -24$ y cuando $x = 24$
b) $y = x^3$; cuando $x = 7$ y cuando $x = 24$

3. Halla la velocidad de un objeto al cabo de 5 segundos que cae partiendo del reposo y recorre una distancia $r = 4.9t^2$

4. Halla la velocidad de un móvil que recorre la distancia $r = 1/3\ t^2 + 16\ t$ en $t = 2$ segundos.

5. ¿Cuándo alcanza su velocidad cero un objeto que se mueve en una trayectoria rectilínea, si recorre un espacio $r = t^3 - 6t^2 + 12t$?

3.2. Reglas de derivación de funciones

En esta sección se abordará el estudio de las reglas para derivar funciones algebraicas; para tal efecto estableceremos fórmulas fundamentales de derivadas, como son la derivada de: funciones constantes, lineales, potencia, constantes por funciones, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales; además, se definirán los criterios para que una función sea o no derivable y de esa manera se podrán determinar las derivadas de todas las funciones algebraicas.

Derivada de una función constante. Sea una función constante $f(x) = C$. Su gráfica es (como se sabe) una recta paralela al eje de abscisas. Puesto que para cualquier valor de la abscisa su ordenada correspondiente es, constantemente, igual a C, si a es un punto cualquiera del dominio de la función $f(x)$ y h es el incremento correspondiente, se tiene que $f(a+h) = C$ y $f(a) = C$, por lo que:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

luego entonces la derivada de una constante es siempre cero.
Por lo tanto, si $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$, y en su forma más usual:

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

Derivada de la función identidad. Sea $f(x) = x$, su gráfica es (como se sabe) una recta que forma un ángulo de 45° con la horizontal. Puesto que para cualquier valor de la abscisa su ordenada correspondiente es de igual valor, luego entonces:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)-x}{h}=\frac{h}{h}=1, \text{ entonces, } \lim_{h\to 0} 1=1$$

de tal manera que: $f'(x)=1$, y en su forma usual:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x)=1$$

Derivada de una función lineal. Sea f una función lineal cualquiera $f(x) = mx + b$,

entonces,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{m(x+h)+b-(mx)-b}{h}=\frac{mh}{h}=m \text{ , por lo tanto:}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} m = m$$

lo cual significa que la derivada de una recta coincide con su pendiente y en consecuencia, la tangente en un punto a una recta es la propia recta, esto es:

Si $f(x)=mx+b$, su derivada será $f'(x)=m$

Y en su forma usual:

$$\frac{d}{dx}(mx+b)=m$$

Ejemplo 7

Deriva las siguientes funciones:

a) $y = 9x - 1$
b) $y = -5x + 17$

Solución

Como en ambos incisos se tienen funciones lineales, entonces:

a) $\frac{d}{dx}(9x-1)=9$, que es la pendiente.

b) $\frac{d}{dx}(-5x+17)=-5$, que es la pendiente.

Derivada de una función potencia. La derivada de la función $y = x^n$ es:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Ejemplo 8

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^{314}$

Solución

Como en ambos incisos se tienen funciones potencia, la derivada es:

a) $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$, esto es: $f'(x) = 2x$, asimismo;

b) $\frac{d}{dx}(x^{314}) = 314x^{314-1} = 314x^{313}$, esto es: $f'(x) = 314\, x^{313}$

Derivada de una constante *k* por una función *f*(*x*). Si k es una constante y $f(x)$ una función, la derivada de la nueva función $k\,f(x)$ será:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}(f(x))$$

Ejemplo 9

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

b) $f(x) = 9x^3$

Solución

Se tiene que $\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}(f(x))$, por lo que:

a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{5}{2}x^2\right)=\dfrac{5}{2}\dfrac{d}{dx}(x^2)=\dfrac{5}{2}(2x^{2-1})=\dfrac{5}{2}(2x)=5x$

b) $\dfrac{d}{dx}(9x^3)=9\dfrac{d}{dx}(x^3)=9(3x^{3-1})=9(3x^2)=27x^2$

Derivadas de las funciones trigonométricas directas sen *x* y cos *x*.

La derivada de la función $f(x)$ = sen x es: $f'(x)$ = cos x ó

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)=\cos x$$

La derivada de la función $g(x)$ = cos x es: $g'(x)$ = – sen x ó

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\operatorname{sen} x$$

Derivada de la función logaritmo neperiano *ln* |*x*|. Puesto que el logaritmo sólo está definido para valores positivos distintos de cero, es necesario considerar el logaritmo del valor absoluto de x:

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$$

Derivadas de funciones exponenciales a^x y e^x . Sea la función $y = a^x$, siendo a una constante positiva distinta de 1. La derivada de esta función en un punto x es:

$$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln(a)$$

En particular, cuando la constante a es el número e, la derivada de la función e^x es $(e^x)'=e^x\ln e=e^x(1)=e^x$ o $\dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x$

El uso de las fórmulas de derivación anteriores se consideran en el siguiente apartado. Hasta el momento se han revisado las derivadas de algunas funciones elementales pero no hemos revisado un esquema que nos permita encontrar la derivada de una suma, un producto o un cociente; por consiguiente, requerimos avanzar en la obtención de propiedades encaminadas a este fin.

3.3. Derivadas de operaciones con funciones

Para realizar operaciones con funciones es necesario recordar cómo se define la suma, el producto y el cociente de funciones estudiadas en la unidad 1.

Si f y g son funciones definidas en un intervalo $[a,b]$ cuya imagen es todo R, son validas las siguientes operaciones de funciones:

- Función suma de f y g como la nueva función:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- Función producto de f y g como la función:

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

- Función cociente de f y g como:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

siempre que $g(x) \neq 0$

Derivada de una suma de funciones: si f y g son dos funciones derivables en un mismo punto x de un intervalo, la derivada de la función suma en dicho punto se obtiene calculando

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Luego entonces, la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x) \qquad \text{ó}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

Derivada de una diferencia de funciones. Por definición de resta de funciones se tiene:

$$f - g = f + (-g)$$

análogamente al caso anterior se tiene que:

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x))$$

Ejemplo 10

Calcula la derivada de las funciones:

a) $f(x) = x - \cos x$
b) $f(x) = x^3 - \operatorname{sen} x + \ln |x|$, en el punto $x = -\pi/3$

Solución

a) Se tiene que la derivada de la función identidad $\frac{d}{dx}(x) = 1$ y $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$, por lo que:

$$\frac{d}{dx}(x - \cos x) = 1 - (-\operatorname{sen} x) = 1 + \operatorname{sen} x$$

b) Se tiene que $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, además $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$, y $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$, por lo que:

$$\frac{d}{dx}(x^3 - \operatorname{sen} x + \ln|x|) = 3x^2 - \cos x + \frac{1}{x}$$

Ahora bien, sustituyendo x por $-\pi/3$ se obtiene

$$f'(-\frac{\pi}{3}) = 3(-\frac{\pi}{3})^2 - \cos(-\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi}$$

Derivada de un producto de funciones. Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un mismo punto x, entonces la derivada del producto está dada por:

$$\frac{d}{dx}(fg(x)) = g(x)\frac{d(f(x))}{dx} + f(x)\frac{d(g(x))}{dx}$$

Ejemplo 11

Halla las derivadas de:

a) $h(x) = x \cdot \ln x$; para cualquier x positivo

b) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ sen } x$

Solución

a) Sea $f(x)= x$; entonces $f'(x)= 1$; asimismo, $g(x)= \ln x$; entonces, $g'(x)= 1/x$

Luego entonces, $[f(x)\, g(x)]' = 1 \ln x + x\, 1/x = \ln x + 1$

b) Sea $f(x)= x^2$, entonces, $f'(x)= 2x$; asimismo, $g(x)=$ sen x, entonces,

$g'(x)= \cos x$

Luego entonces, $h'(x) = \frac{1}{2}[2x \text{ sen } x + x^2 \cos x]$

Derivada de un cociente de funciones. Considérense, como en los casos precedentes, dos funciones f y g definidas y derivables en un punto x. Además, en este caso se tiene que imponer la condición de que la función g no se anule en x.

Por lo tanto, la derivada del cociente $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$ queda como

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d(f(x))}{dx} - f(x)\frac{d(g(x))}{dx}}{(g(x))^2}$$

Ejemplo 12

Calcula la derivada de $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, donde n es un número natural.

Solución

Dado que $f(x)=1$ y $g(x)=x^n$ y utilizando la forma del cociente se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\right]=\frac{x^n\dfrac{d(1)}{dx}-(1)\dfrac{d(x^n)}{dx}}{\left[x^n\right]^2}=\frac{x^n(0)-(1)nx^{n-1}}{x^{2n}}=-n\frac{x^{n-1}}{x^{2n}}$$

Por lo tanto: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{x^n}\right]=-nx^{n-1-2n}=-nx^{-n-1}$

Derivada de la función tan *x*: Puesto que $\tan x=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Dado que $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\cos x$, cuyas derivadas se definieron anteriormente como:

$$f'(x)=\cos x \quad \text{y} \quad g'(x)=-\operatorname{sen} x$$

y aplicando la fórmula de la derivada de un cociente,

$$(\tan x)'=\frac{\cos x \ \cos x \ -\operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

Por lo tanto, $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\sec^2 x$, o $\dfrac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$

Derivada de la función sec *x*: Puesto que $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

Si $f(x)=1$ y $g(x)=\cos x$

Y sus derivadas respectivas son:

$f'(x)=0$ y $g'(x)=-\operatorname{sen} x$

De la fórmula de la derivada de un cociente:

$$(\sec x)'=\frac{0 \ \cos x \ -1 \ (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)=\sec x \ \tan x$$

Por lo tanto, $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$ o

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

Derivada de la función csc x: Puesto que $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Si $f(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$

Sus derivadas están dadas por:

$$f'(x) = 0 \quad \text{y} \quad g'(x) = \cos x$$

De la derivada de un cociente,

$$(\csc x)' = \frac{0 \operatorname{sen} x - 1 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\left(\frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = -\csc x \cot x$$

Por lo tanto, $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$, o $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Derivada de la función ctg x. Puesto que $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

Si $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$; si $g(x) = \operatorname{sen} x$, $g'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= \frac{-(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x = -(1+\cot^2 x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, o de manera usual

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Ejemplo 13

Calcula la derivada $h(x)=\dfrac{x\ \cos x-2}{x^2}$

Solución

Llamando $f(x) = x \cos x - 2$ se tiene un producto de funciones $(x \cos x)$ más la constante (–2), por lo que:

$$\frac{d(f(x))}{dx}=\frac{d(x\cos x-2)}{dx}=(1)\cos x+x(-\text{sen } x)=\cos x-x\ \text{sen } x\ ;$$

(la derivada de 2 es cero por ser una constante).

Si $g(x) = x^2$, $\dfrac{d(g(x))}{dx}=\dfrac{d(x^2)}{dx}=2x$, entonces utilizando la forma del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\dfrac{d(f(x))}{dx}-f(x)\dfrac{d(g(x))}{dx}}{(g(x))^2}$$, sustituyendo se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\cos x-2}{x^2}\right)=\frac{x^2(\cos x-x\ \text{sen } x)-(x\cos x-2)2x}{x^4}=$$

$$=\frac{x(x\cos x-x^2\text{sen } x-2x\cos x+4)}{x^4}=\frac{-x\cos x-x^2\text{sen } x\ +4}{x^3}$$

Por lo tanto, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x\cos x-2}{x^2}\right)=\dfrac{-x\cos x-x^2\text{sen } x\ +4}{x^3}$

Ejemplo 14

Calcula la derivada $h(x)=\dfrac{x\ \tan\ x-\cos\ x}{\ln x}$

Solución

Como se observa que la función además de ser un cociente se tiene un producto y un sumando, por lo que definimos $f(x)=x\ \tan\ x-\cos\ x$ de tal manera que:

$$\frac{d(f(x))}{dx}=\frac{d(x\tan x-\cos x)}{dx}$$

Por lo que obtenemos:

$$\frac{d(f(x))}{dx} = (1)\tan x + x(\sec^2 x) - (-\text{sen}\, x) = \tan x + x(1+\tan^2 x) + \text{sen}\, x$$

Ahora definimos $g(x) = \ln(x)$, cuya derivada está dada por $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$, entonces aplicando la forma del cociente tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\tan x - \cos x}{\ln x}\right) = \frac{\ln x(\tan\ x + x + x\ \tan^2 x + \text{sen}\, x) - (x\tan x - \cos x)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

Ejercicio 2

1. Deriva las funciones

a) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - x + 9$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

2. Deriva el producto de funciones $f(x) = \text{sen}\, x\ \text{sen}\, x$

3. Deriva el producto de funciones $f(x) = \sec x \tan x$

4. Deriva la función $y = \left(\frac{2}{1-x}\right)^2$

5. Deriva la función $f(x) = \frac{4 - 3x - x^2}{x^3 + 1}$

3.4. Regla de la cadena

A pesar de contar ya con un número estimable de propiedades para el cálculo de derivadas, hay funciones elementales de las que no se conoce ningún procedimiento para la obtención de su derivada. Para seguir avanzando por este camino es imprescindible conocer una de las propiedades fundamentales y más útiles de la derivación, aunque no se hará su demostración. Se le conoce como derivada de una función compuesta o regla de la cadena.

Esta propiedad asegura que si $y = f(x)$ donde $f(x)$ es una función derivable en un cierto intervalo; $z = g(y)$ es otra función derivable y definida en otro intervalo que contiene a todos los valores (imágenes) de la función *f,* entonces la función compuesta definida por $(gof)(x) = g[f(x)]$, es derivable en todo punto *x* del intervalo y se obtiene así:

$$(gof)'(x) = g'[f(x)]\ f'(x) \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}((gof)(x)) = \frac{dg(f(x))}{dx} \bullet \frac{d(f(x))}{dx}$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}(gof)(x) = \frac{dg(y)}{dy} \bullet \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo 15

Calcula la derivada de la función $h(x) = \text{sen}\, x^2$.

Solución

La función $h(x) = \text{sen}\, x^2$ es una función compuesta de otras dos, las cuales definimos como:

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \text{sen}\, x$$

desarrollando la composición se tiene:

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \text{sen}\, x^2$$

Al ser $g(x) = \text{sen}\, x$ y $g'(x) = \cos x$, por lo tanto:

$$g'[f(x)] = \cos f(x) = \cos x^2 \quad \text{y} \quad f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

Luego entonces, por la regla de la cadena, se tiene:

$$h'(x) = g'[f(x)]f'(x) = 2x\cos x^2$$

Ejemplo 16

Calcula la derivada de la función $h(x) = \left[\dfrac{x^2+1}{x}\right]^3$

Solución

$h(x)$ es la composición de las funciones $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ y $g(x) = x^3$

donde se debe suponer que $x \neq 0$ ya que en este valor la función f no está definida:

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{x^2+1}{x}\right] = \left[\frac{x^2+1}{x}\right]^3$$

de $g(x) = x^3$, se deduce $g'(x) = 3x^2$. En consecuencia,

$g'[f(x)] = 3f(x)^2 = 3\left[\dfrac{x^2+1}{x}\right]^2$, por otro lado,

$$f'(x) = \frac{x(2x)-(x^2+1)1}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Así que por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3\right] = 3\left[\frac{x^2+1}{x}\right]^2\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$$

Regla de la cadena para la función potencia. Se sabe que la derivada de una función $f(x) = x^m$ es $f(x) = mx^{m-1}$. Si en lugar de la variable x se tuviese una función $u(x)$, la derivada de $u(x)^m$, aplicando la regla de la cadena, será:

$$[u(x)^m]' = mu(x)^{m-1}u'(x)$$

Para simplificar la notación a partir de ahora se escribirá simplemente u en lugar de $u(x)$. Así, si

$$f(x) = u^m$$

su derivada definida para una función potencia es dada por:

$$f'(x) = (u^m)' = mu^{m-1}u' \quad \text{o} \quad \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{d(u)}{dx}$$

Ejemplo 17

Calcula la derivada de $f(x) = (x^2+1)^3$.

Solución

Si $u = x^2+1$ y su derivada es $u' = 2x$, en este caso m = 3 y la función la escribimos como:

$f(x) = u^3$ de tal manera que su derivada está dada por la regla de la cadena,

$f'(x) = 3u^2u' = 3(x^2+1)^2(2x) = 6x(x^2+1)^2$

Regla de la cadena para la función logaritmo neperiano. Si en la derivada de logaritmo neperiano se sustituye x por una función de x, $u(x)$, en virtud de la regla de la cadena se tiene que:

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

o de forma general:

$$\frac{d(\ln|u|)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{d(u)}{dx}$$

Ejemplo 18

Calcula la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$

b) $f(x) = \ln|\operatorname{sen} x|$

Solución

a) Tomando $u = \frac{x^2+1}{x^2}$ se calcula u' aplicando la derivada de un cociente:

$u' = \frac{x^2(2x)-(x^2+1)2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$; se aplica la regla de la cadena:

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\left(\frac{-2}{x^3}\right) = -\frac{2x^2}{x^3(x^2+1)} = \frac{-2}{x(x^2+1)}$$

b) Sea $u = \operatorname{sen} x$ y su derivada $u' = \cos x$ entonces:

$$f'(x) = (\ln|\operatorname{sen} x|)' = \frac{u'}{u} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot\ x$$

Regla de la cadena para las funciones exponenciales. Si en lugar de x se tuviese una función $u(x)$ de tal forma que para una función $f(x) = a^u$ se tendrá por la regla de la cadena:

$f'(x) = (a^u)' = u'a^u \ln a$, esto es, $\frac{d(f(x))}{dx} = \frac{d(u)}{dx}(a^u)\ln a$ o de forma general:

$$\frac{d(a^u)}{dx} = (a^u)\ln a \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

y para $g(x) = e^u$, $g'(x) = (e^u)' = u'e^u$ esto es de forma general:

$$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u\,\frac{d(u)}{dx}$$

Ejemplo 19

Calcula la derivada de

a) $f(x) = 4^{(x\,\mathrm{sen}\,x)}$
b) $g(x) = e^{-x^2}$

Solución

Llamando $u = x\,\mathrm{sen}\,x$ y su derivada es: $u' = (1)\mathrm{sen}\,x + x\cos x$

De tal manera que la función ahora es dada por:

$f(x) = 4^u$ y su derivada por forma general será dada por:

$f'(x) = (4^u)' = (u')4^u \ln 4$ y sustituyendo la función $u(x)$ y su respectiva derivada tendremos:

$$f'(x) = (4^{(x\,\mathrm{sen}\,x)})' = (\mathrm{sen}\,x + x\cos x)4^{(x\,\mathrm{sen}\,x)} \ln 4$$

b) Dada la función $g(x) = e^{-x^2}$ hacemos $u = -x^2$ y, respectivamente, su derivada es dada por $u' = -2x$; entonces retomamos la función inicial pero ahora en función de $u(x)$, esto es: $g(x) = e^u$, de tal manera que $g'(x) = (e^u)' = u'(e^u) = -2xe^{-x^2}$

Regla de la cadena para las funciones trigonométricas

En la siguiente tabla se resumen las derivadas de funciones trigonométricas compuestas desarrolladas por la regla de la cadena:

Tabla 3.1.

$$(\mathrm{sen}\,u)' = u'\cos u \quad \text{o} \quad \frac{d(\mathrm{sen}\,u)}{dx} = (\cos u)\frac{d(u)}{dx}.$$

$$(\cos\,u)' = -u'\mathrm{sen}\,u \quad \text{o} \quad \frac{d(\cos\,u)}{dx} = (-\mathrm{sen}\,u)\frac{d(u)}{dx}.$$

$$(\tan\,u)' = (1+\tan^2 u)u' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'\sec^2 u \quad \text{o} \quad \frac{d(\tan\,u)}{dx} = \frac{d(u)}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right) = (\sec^2 u)\frac{d(u)}{dx}.$$

$$(\sec u)' = u' \sec u \tan u \quad \text{o} \quad \frac{d(\sec u)}{dx} = (\sec u \tan u)\frac{d(u)}{dx}.$$

$$(\csc u)' = u'(-\csc u \cot u) \quad \text{o} \quad \frac{d(\csc u)}{dx} = (-\csc u \cot u)\frac{d(u)}{dx}.$$

$$(\cot u)' = -u'(1+\cot^2 u) = \frac{-u'}{\operatorname{sen}^2 u} \quad \text{o} \quad \frac{d(\cot u)}{dx} = -\frac{d(u)}{dx}(1+\cot^2 u) = -\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\right)\frac{d(u)}{dx}.$$

Ejemplo 20

Calcula la derivada de

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$
b) $g(x) = \sec(x^2 - 1)$
c) $h(x) = \operatorname{sen}^3(x^2)$

Solución

a) Si $u = \operatorname{sen} x$, $u' = \cos x$, entonces:

$f'(x) = (\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))' = u' \cos u = \cos x \ \cos(\operatorname{sen} x)$

b) Si $u = x^2 - 1$; $u' = 2x$, entonces:

$g'(x) = (\sec(x^2 - 1))' = u' \sec u \ \tan u = 2x \ \sec(x^2 - 1) \ \tan(x^2 - 1)$

c) En este inciso podemos observar que la función $g(x)$ está compuesta de dos funciones a las que llamaremos $u = \operatorname{sen} v$ y $v = x^2$, de tal manera que se tiene la función:

$$h(x) = \operatorname{sen}^3(x^2) = \operatorname{sen}^3 v = u^3$$

Por la regla de la cadena, la derivada tenemos:

$$h'(x) = (u^3)' = 3u^2 \cdot u'$$

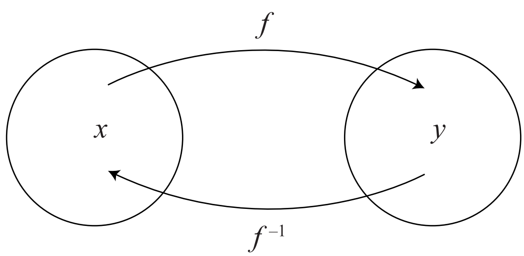
y como $u = \operatorname{sen} v$ y su derivada será $u' = \cos v \ v'$, y $v = x^2$, tal que su derivada es $v = 2x$,

finalmente:

$$\begin{aligned} h'(x) = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3u^2 \cdot \cos v \cdot v' \\ = 3(\operatorname{sen} x^2)^2(\cos x^2)(2x) \\ = 6x(\cos x^2)(\operatorname{sen} x^2)^2 \end{aligned}$$

3.5. Derivada de la función inversa

Uno de los résultados más importantes del cálculo se refiere a la derivada de las funciones inversas. Una función $g(x)$ es inversa de una función $f(x)$ si $gof(x) = x$ y $fog(y) = y$; a g se le denota f^{-1}.



Para encontrar la derivada de la función inversa usaremos el siguiente teorema:

Teorema. Sea f una función derivable en x_0 tal que $f'(x_0) \neq 0$, entonces, si f^{-1} existe, su derivada en $y_0 = f(x_0)$ es

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ejemplo 21

Deriva la función $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

Se tiene que $y = f(x) = \sqrt{x}$ es la inversa de la función $g(y) = y^2$, su derivada es:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^2)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 22

Obtén la derivada de

$y = f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Solución

$y = f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ es la inversa de la función $g(y) = y^3 + 1$

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x-1} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^3+1)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x-1}\;)^2}$$

3.6. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas son continuas y monótonas en su dominio definido por ciertos rangos como por ejemplo: la función sen x definida en $[-\pi/2, \pi/2]$ toma todos los valores del intervalo $[-1, 1]$ una sola vez, es decir, dos números distintos de $[-\pi/2, \pi/2]$ alcanzan valores distintos en $[-1, 1]$.

En estas condiciones se puede definir la aplicación inversa de $f(x) = \text{sen}\, x$, llamada "arco-seno" que se simboliza por arc sen x.

Así, dado que sen $\pi/6 = ½$, entonces: arc sen $½ = \pi/6$.

Entonces, si $f(x) = \text{sen}\, x$; ocurre que $f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(\text{sen}\, x) = \text{arc sen}(\text{sen}\, x) = x$

Derivada de la función arc sen *x*

La función $f(x) = \text{sen}\, x$ es derivable en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $f'(x) = \cos x \neq 0$ en ese intervalo. Por el teorema de la función inversa se tiene que $f^{-1}(x) = \text{arc sen}\, x$ es derivable en $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ y su derivada está dada por

$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ es decir

$$(\text{arc sen})'\,(\text{sen}\,x)=\frac{1}{(\text{sen}\,x)'}=\frac{1}{\cos x}$$

si llamamos y = sen x entonces

$$(\text{arc sen})'\,(y)=\frac{1}{\cos x}$$

De la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Tenemos que

$\cos x=\sqrt{1-\text{sen}^2 x}=\sqrt{1-y^2}$, por lo tanto,

$$(\text{arc sen})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

O bien

$$\frac{d(\text{arc sen}\,x)}{dx}=(\text{arc sen})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Utilizando el mismo procedimiento obtenemos los siguientes resultados:

$$\frac{d(\text{arc }\cos x)}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\text{arc}\tan x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d(\text{arc }\cot x)}{dx}=\frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d(\text{arc }\sec x)}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d(\text{arc }\csc x)}{dx}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Regla de la cadena para funciones trigonométricas inversas. Si en cada una de las derivadas anteriores se tuviese una función de x, $u(x)$, en lugar de x, las derivadas de las nuevas funciones compuestas se convierten, por la regla de la cadena en:

$$f(x) = \text{arc sen}\, u\,;\ f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,; \qquad f(x) = \text{arc cos}\, u\,; \qquad f'(x) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\,;$$

$$f(x) = \text{arc tan}\, u\,;\ f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}\,; \qquad f(x) = \text{arc cot}\, u\,;\ f'(x) = \frac{-u'}{1+u^2}\,;$$

$$f(x) = \text{arc sec}\, u\,;\ f'(x) = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}\,; \quad f(x) = \text{arc csc}\, u\,;\ f'(x) = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Ejemplo 23

Calcula la derivada de:

a) $y = \text{arc sen}\left(\dfrac{x+1}{x\text{-}1}\right)$

b) $y = \text{arc tan}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$

Solución

a) Si $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, por la derivada de un cociente se tiene que: $u' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$,

entonces: $y' = -\dfrac{2}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}}$

b) Si $u = \dfrac{\ln x}{x}$; $\Rightarrow u' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

entonces: $y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}\,\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}\,\dfrac{x^2}{x^2+(\ln x)^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2+(\ln x)^2}$

Ejemplo 24

Calcula la derivada de

a) $y = \text{arc sec } \dfrac{5x^3}{3}$

b) $y = \text{arc csc}\sqrt{x^2 - 1}$

Solución

a) Si $u = \dfrac{5x^3}{3}$; $\Rightarrow$ $u' = 5x^2$, entonces, $y' = \dfrac{5x^2}{\dfrac{5}{3}x^3\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}x^3\right)^2 - 1}} = \dfrac{5x^2}{\dfrac{5}{3}x^3\sqrt{\dfrac{25}{9}x^6 - 1}}$

b) Si $u = \sqrt{x^2 - 1}$; $\Rightarrow$ $u' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, entonces; $y' = \dfrac{-x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 2}}$

La intención fundamental de las secciones 3.2 a 3.6 es que conozcas y manejes la derivada de las funciones elementales principales, como son x^n, a^x, e^x, $\ln x$, sen x, cos x, tan x y la de sus respectivas inversas, así como de las derivadas de funciones compuestas. Esto ofrece la posibilidad de calcular la derivada de cualquier función.

Toda la dificultad aquí se reduce a saber representar una función dada en forma de una cadena de las funciones elementales principales.

3.7. Derivadas de funciones implícitas

Se dice que una función está escrita en forma implícita si no se encuentra despejada una variable en función de las otras, es decir, si se puede escribir de la forma $f(x, y) = 0$.

Para obtener la derivada de las funciones implicitas se deriva la expresión $f(x, y) = 0$ término a término respecto a x, recordando que $y = f(x)$ y aplicando la regla de la cadena. Supongamos que la expresión $f(x, y) = 0$ posee el término y^2, para derivarlo procedemos de la siguiente forma

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{dy^2}{dy} \bullet \frac{dy}{dx} = 2yy'$$

Ejemplo 25

Halla y', si $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$

Solución

En este caso se tiene que: $\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$

$$x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2) - x\frac{d}{dx}(y^2) - y^2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0$ y despejando y' se obtiene

$$y' = \frac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$$

Ejemplo 26

Halla $\frac{dy}{dx}$, si $4 \operatorname{sen}(x + y) + 3x + 2y = 0$

Solución

$$\frac{d}{dx}[4 \operatorname{sen}(x + y)] + \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(2y) = 0$$

$4\cos(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + 3 + 2\frac{dy}{dx} = 0,$ despejando $\frac{dy}{dx}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3 + 4\cos(x + y)}{2 + 4\cos(x + y)}$$

3.8. Derivadas de orden superior

En este apartado únicamente se mostrarán ejemplos, dado que ya se trató todo lo referente a derivadas en las secciones anteriores y las derivadas de orden superior se consideran aplicaciones sucesivas de los razonamientos ya tratados.

Ejemplo 27

Calcula todas las derivadas superiores de $y = x^3$

Solución

Derivando se obtiene:

$\frac{d(y)}{dx} = 3x^2$, para la primera derivada o derivada de primer orden.

$\frac{d^2}{dx}(y) = 6x$, para la segunda derivada o derivada de segundo orden.

$\frac{d^3(y)}{dx} = 6$, para la tercera derivada o derivada de tercer orden.

$\frac{d^4(y)}{dx} = 0$, para la cuarta derivada o derivada de cuarto orden.

Por lo tanto, para la función dada $\frac{d^n(y)}{dx} = 0 \quad \text{si} \quad n \geq 4$

También llamada de orden *n*.

Ejemplo 28

Encuentra las tres primeras derivadas de la función dada $y = x^{\frac{1}{2}}$

Solución

Derivando por primera vez, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

derivando por segunda vez:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

y derivando por tercera vez:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{8\sqrt{x^5}}=\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

Ejercicio 3

1. Deriva la función $f(x)=\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^7$

2. Deriva la función $f(x)=\cos\frac{1}{x}$

3. Deriva la función $y=\text{arc sen}\,x^3$

4. Deriva la función $y=e^{-5x}\ln x$

5. Deriva la función implícita $x^2-y^2=3$

Ejercicios resueltos

1. Calcula la derivada de la función $f(x) = 3x + 5$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución

Se pide el valor de $f'(1)$ (en este caso, $x_0 = 1$).

$$\frac{d(f(1))}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3(1+h)+5)-(3(1)+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3h+8-8)}{h}=$$

$\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}(3)=3$, por lo tanto, $\frac{d(f(1))}{dx}=3$

Por lo tanto, $f'(1) = 3$.

2. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 2.

Solución

La tangente pasa por el punto $(2, f(2)) = (2, 4)$.

La pendiente de la tangente a la curva en el punto de abscisa 2 es, por definición, $f'(2)$, luego la ecuación de la recta es de la forma $y - 4 = f'(2)(x - 2)$.

$$\frac{d(f(2))}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4 \text{, por lo tanto, } \frac{d(f(2))}{dx} = 4$$

La ecuación de la tangente es entonces

$y - 4 = 4(x - 2)$; $y - 4 = 4x - 8$; $4x - y - 4 = 0$.

3. Calcula la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa -1.

Solución

Dado que la función es de la forma $y = x^n$, entonces su derivada está dada por la fórmula $y' = nx^{n-1}$, así que: $f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$. Luego entonces,

$$f'(-1) = 2 \bullet (-1) = -2$$

Entonces, la pendiente de la tangente a la parábola $y = x^2$ en $x = -1$ es -2.

4. Determina la derivada de las siguientes funciones. Aquí, si la función es de la forma $y = u^n$, con $u(x)$, entonces la derivada está dada por la fórmula $y' = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

a) $y = (2x-3)^2$

Solución

Sea $y = u^2$, con $u = 2x - 3$, entonces $y' = 2(2x-3)(2)$, esto es, $y' = 4(2x-3)$

b) $y = (x^4 - x^2)^5$

Solución

Sea $y = u^5$ con $u = x^4 - x^2$, entonces $y' = 5(x^4-x^2)^4(4x^3-2x)$, esto es, $y' = 5(4x^3-2x)(x^4-x^2)^4$

c) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 2}$

Solución

Sea $y = u^{\frac{1}{3}}$ con $u = 3x^2 - 2$, escribiendo la función en potencia en vez de radical se tiene $y = (3x^2 - 2)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3}(3x^2 - 2)^{-\frac{2}{3}}(6x),\ \text{esto es, }\ y' = \frac{6x}{3(3x^2 - 2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}}$$

d) $y = (\cos x)^4$

Solución

Sea $y = u^4$ con $u = \cos x$, entonces, $y' = 4(\cos x)^3(-\operatorname{sen} x)$, esto es,

$$y' = (-4\operatorname{sen} x)(\cos x)^3$$

e) $y = \operatorname{sen}(4x^{\frac{3}{2}})$

Solución

Sea $y = \operatorname{sen} u$ con $u = 4x^{\frac{3}{2}}$, la derivada se obtiene con la fórmula $\frac{d(y)}{dx} = \frac{d(\operatorname{sen} u)}{dx}\frac{d(u)}{dx}$, entonces, $y' = \cos(4x^{\frac{3}{2}})(\frac{3}{2}(4x^{\frac{1}{2}}))$, esto es, $y' = 6x^{\frac{1}{2}}\cos(4x^{\frac{3}{2}})$

5. Para todos los casos de este apartado se seguirá la siguiente fórmula de derivación:

$$y = \ln(u)\ \text{ con } u(x);\ y' = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

a) $y = \ln(1 - 3x^3)$

Solución

Considerando $u = 1 - 3x^3$ se tiene que: $y' = \frac{1}{(1 - 3x^3)}(-9x^2)$, esto es, $y' = \frac{-9x^2}{(1 - 3x^3)}$

b) $y = \ln(\sqrt{x})$

Solución

Rescribiendo la función se tiene $y = \ln(x^{\frac{1}{2}})$, esto es, considerando $u = x^{\frac{1}{2}}$ se tiene que:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right), \text{ por lo tanto, } y' = \frac{1}{(2\sqrt{x})x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

c) $y = \ln(\sqrt{\cos x})$

Solución

Rescribiendo la función se tiene $y = \ln(\cos x)^{\frac{1}{2}}$, considerando $u = v^{\frac{1}{2}}$ y $v = \cos x$ se tiene que:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\left(\frac{1}{2}\cos x\right)^{-\frac{1}{2}}(-\operatorname{sen} x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}(\cos x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}\sqrt{\cos x}}$$

$$y' = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x} = -\frac{1}{2}\tan x, \text{ por la identidad } \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

d) $y = \ln(\operatorname{sen} 3x)$

Solución

Considerando $u = \operatorname{sen} v$ y $v = 3x$ se tiene que: $y' = \frac{1}{\operatorname{sen} 3x}(\cos 3x)(3)$, esto es,

$$y' = \frac{3\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}; \quad y' = 3\cot 3x$$

e) $y = \ln\left[(x^3+2)(x^2+3)\right]$

Solución

Rescribiendo la función $y = \ln(x^3+2) + \ln(x^2+3)$, esto es, considerando $u_1 = x^3 + 3$ y $u_2 = x^2 + 3$ se tiene que $y' = \frac{1}{x^3+2}(3x^2) + \frac{1}{x^2+3}(2x) = \frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{2x}{x^2+2}$

6. En este caso se emplearán las siguientes fórmulas de derivación:

$y = e^u$ entonces $y' = e^u \dfrac{du}{dx}$; $y = a^u$ entonces $y' = a^u \ln(a)\dfrac{du}{dx}$

a) $y = e^{3x}$

Solución

Considerando $u = 3x$ se tiene que: $y' = e^{3x}(3)$, esto es, $y' = 3e^{3x}$

b) $y = e^{\operatorname{sen} x}$

Solución

Considerando $u = \operatorname{sen} x$ se tiene que, $y' = e^{\operatorname{sen} x}(\cos x)$, esto es, $y' = \cos x e^{\operatorname{sen} x}$

c) $y = e^{-\frac{1}{2}x}$

Solución

Considerando $u = -\dfrac{1}{2}x$ se tiene que, $y' = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $y' = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

d) $y = a^{3x^2}$

Solución

Considerando $u = 3x^2$ se tiene que $y' = a^{3x^2}\ln(a)6x$, esto es, $y' = 6x\ln(a)a^{3x^2}$

e) $y = 5^{3x^2}$

Solución

Considerando $u = 3x^2$ se tiene que $y' = 5^{3x^2}\ln(5)(6x)$, esto es,

$y' = 1.6094(6x)5^{3x^2} = 9.7x(5^{3x^2})$

7. Obtén las derivadas de las siguientes funciones circulares:

a) $f(x)=\cos(3x)$

Solución

Considerando $u=3x$ se tiene que: $f'(x)=-\operatorname{sen}(3x)(3)$, esto es, $f'(x)=-3\operatorname{sen}(3x)$

b) $f(x)=\cos(\cos x)$

Solución

De la fórmula $\dfrac{d\cos u}{dx}=-\operatorname{sen}u\dfrac{du}{dx}$

Considerando $u=\cos x$ se tiene que $f'(x)=-\operatorname{sen}(\cos x)(-\operatorname{sen}x)$, esto es, $f'(x)=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(\cos x)$

c) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}x^2=(\operatorname{sen}x)^2\operatorname{sen}(x^2)$

Solución

De la fórmula $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}u=\cos u\dfrac{du}{dx}$

Considerando $u=\operatorname{sen}x$ se tiene que:

$f'(x)=2(\operatorname{sen}x)(\cos x)(\operatorname{sen}x^2)+(\operatorname{sen}x)^2(\cos x^2)(2x)$, esto es,

$f'(x)=2\operatorname{sen}x(\cos x\operatorname{sen}x^2+x\operatorname{sen}x\cos x^2)$

d) $f(x)=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{3}$

Solución

De la fórmula $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen}u)=\dfrac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$, esto es, considerando $u=\dfrac{x}{3}$ se tiene que:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}=\frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

e) $f(x)=\arctan x^2$

Solución

De la fórmula $\frac{d}{dx}(\arctan u)=\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$,

esto es, considerando $u=x^2$ se tiene que: $f'(x)=\frac{2x}{1+(x^2)^2}=\frac{2x}{1+x^4}$

8. Encuentra la derivada de las siguientes funciones implícitas:

a) Halla y' de $x^2+y^2-1=0$

Solución

$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(1)=0$, entonces, $2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$

b) Si $x^3y-4xy^2=y+x^2$, halla y'

Solución

Se tiene que $x^3\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x^3)-4x\frac{d}{dx}(y^2)-4y^2\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(y)+\frac{d}{dx}(x^2)$, derivando: $x^3y'+3x^2y-8xyy'-4y^2=y'+2x$, esto es,

$x^3y'-8xyy'-y'=2x-3x^2y+4y^2$, por lo que:

$$y'=\frac{-3x^2y+4y^2+2x}{x^3-8xy-1}$$

c) Halla y' de la función $2xy+\pi\operatorname{sen} y=2\pi$

Solución

Se tiene que $2y\dfrac{d}{dx}(x)+2x\dfrac{d}{dx}(y)+\pi\dfrac{d}{dx}(\text{sen } y)=\dfrac{d}{dx}(2\pi)$ derivando se obtiene:

$2y+2xy'+\pi\cos y(y')=0$, por lo que $y'=\dfrac{-2y}{2x+\pi\cos y}$

d) Dada $(x+y)^2-(x-y)^2=x^4+y^4$, encuentra su derivada implícita.

Solución

Se tiene que $\dfrac{d}{dx}(x+y)^2=2(x+y)(1+\dfrac{d}{dx}(y))$;

$-\dfrac{d}{dx}(x-y)^2=-2(x-y)(1-\dfrac{d}{dx}(y))$,

$\dfrac{d}{dx}(x^4+y^4)=4x^3+4y^3\dfrac{d}{dx}(y)$. De lo que se obtiene:

$2(x+y)(1+y')-2(x-y)(1-y')=4x^3+4y^3y'$, desarrollando

$2x+2y+2xy'+2yy'-2x+2xy'+2y-2yy'=4x^3+4y^3y'$

agrupando y despejando y' tenemos: $y'=\dfrac{x^3-y}{x-y^3}$

e) Si $y=t^3+1$; $x=t^2+3$, halla $\dfrac{dy}{dx}$

Solución

Derivando se tiene: $\dfrac{dy}{dt}=3t^2$, además, $\dfrac{dx}{dt}=2t$, por lo que: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2}{2t}=\dfrac{3}{2}t$;

f) Si $y=t^3$; $x=2t-1$

Solución

Derivando se tiene: $\dfrac{dy}{dt}=3t^2$, además, $\dfrac{dx}{dt}=2$, por lo que: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}t^2$

g) Si $y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$; $x=\left(\dfrac{1}{t+1}\right)$

Solución

Se requiere $\frac{dy}{dx}$, por lo que derivamos primero

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{t+1}\left\{\frac{(t+1)-t}{(t+1)^2}\right\}=\frac{2t}{t+1}\left\{\frac{t+1-t}{(t+1)^2}\right\}=\frac{2t}{t+1}\left\{\frac{t+1-t}{(t+1)^2}\right\}=\frac{2t}{t+1}\left\{\frac{1}{(t+1)^2}\right\}=\frac{2t}{(t+1)^3}$$

Ahora derivando $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}=(t+1)^{-1}=-1(t+1)^{-2}=-\frac{1}{(t+1)^2}$

Finalmente realizando el cociente se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2t}{(t+1)^3}}{-\frac{1}{(t+1)^2}}=-\frac{2t(t+1)^2}{1(t+1)^3}=-\frac{2t}{t+1}$$

h) Si $y=\sqrt[3]{t}$; $x=\sqrt{t}$; determina la derivada implícita.

Solución

Derivando y se tiene: $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$

Derivando x se tiene: $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, de donde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\frac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{t^2}}=\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$$

9. Obtén las siguientes derivadas de orden superior:

a) Deriva tres veces la función $y=e^{-x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=-e^{x};\quad \frac{d^2y}{dx}=e^{-x};\quad \frac{d^3y}{dx}=-e^{-x}$$

b) Halla $\dfrac{d^3y}{dx}$ si $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$

Solución

Deriva sucesivamente

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 7\ ;\quad \frac{d^2y}{dx} = 6x - 10\ ;\quad \frac{d^3y}{dx} = 6$$

c) Halla $\dfrac{d^4y}{dx}$ si $y = \operatorname{sen} 2x$

Solución

Derivando sucesivamente, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x\ ;\quad \frac{d^2y}{dx} = -4\operatorname{sen} 2x\ ;\quad \frac{d^3y}{dx} = -8\cos 2x\ ;\quad \frac{d^4y}{dx} = 16\operatorname{sen} 2x$$

Ejercicios propuestos

1. Encuentra las cuatro primeras derivadas de la función $y = (a + bx^{-3})^4$

2. Encuentra la derivada de la función $y = \arctan(\operatorname{sen} w)$

3. Calcula y' dada $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$

4. Obtén $\dfrac{dy}{dx}$ dada $\begin{cases} x = 2\operatorname{sen} t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

5. Obtén $\dfrac{dy}{dx}$ dada $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \dfrac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$

Autoevaluación

1. Deriva la siguiente función $y = (1 - 6x + 9x^2)^4$

2. Deriva la siguiente función $y = \operatorname{sen}(4x^{\frac{3}{2}})$

3. Deriva la siguiente función $y = 2\tan\left(\frac{3x}{2}\right)$

4. Deriva la siguiente función $y = \operatorname{arc}\csc 2x$

5. Deriva la siguiente función $y = \ln\left[\frac{x^4}{x^3 + 3}\right]$

6. Deriva la siguiente función implícita $x^3 + y^3 = 8xy$

7. Deriva la siguiente función implícita $xy + \ln y = 1$

8. Halla f''', si $f(x) = 5(2x - 3)^5$

9. Encuentra las cuatro primeras derivadas de la función $y = (1 + x)^4$

10. Obtén $\frac{dy}{dx}$ de la función $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$, dada en su forma paramétrica.

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1.

a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

2.

a) $m_1 = -48$ y $m_2 = 48$

b) $m_1 = 147$ y $m_2 = 1\ 728$

3. $v = 49\ m/s$
4. $v = 17.3\ m/s$
5. $t = 2\ s$

Ejercicio 2

1.

a) $f' = 6x^2 + 14x - 1$

b) $f' = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

2. $f' = 2\operatorname{sen} x \cos x$

3. $f' = 2\sec^3 x - \sec x$

4. $y' = \frac{8}{(1-x)^3}$

5. $f' = \frac{x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 2x - 3}{(x^3+1)^2}$

Ejercicio 3

1. $f' = (7+14x)(1+x+x^2)^6$

2. $y' = \dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

3. $y' = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$

4. $y' = e^{-5x}\left(\dfrac{1}{x} - 5\ln x\right)$

5. $y' = \dfrac{x}{y}$

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. $y' = -\dfrac{12b}{x^4}(a + \dfrac{b}{x^3})^3$

2. $y' = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2(w)}\cos w$

3. $y' = \dfrac{y + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = -2\operatorname{sen} t$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t+1}{t(t^2+1)}$

Respuestas a la autoevaluación

1. $y' = 24(3x-1)(1-6x+9x^2)^3$

2. $y' = 6x^{\frac{1}{2}} \cos\left(4x^{\frac{3}{2}}\right)$

3. $y' = 3\sec^2 \dfrac{3x}{2}$

4. $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$

5. $y' = \dfrac{4}{x} - \dfrac{3x^2}{x^3+3}$

6. $y' = \dfrac{8y-3x^2}{3y^2-8x}$

7. $y' = -\dfrac{y}{\left(x+\dfrac{1}{y}\right)}$

8. $f''' = 2\ 400(2x-3)^2$

9. $y^{IV} = 24$

10. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}$