

La integral de Riemann

Vamos a dar una definición precisa de la integral de una función definida en un intervalo. Este tiene que ser un intervalo cerrado y acotado, es decir $[a, b]$ con $a < b \in \mathbb{R}$, y la definición que daremos de integral solo se aplica a funciones acotadas, y no a todas, sino a las funciones que llamaremos integrables.

Definición 1.1 Una **partición** de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos de $[a, b]$ que incluye a los extremos. Una partición P la representamos ordenando sus puntos de menor a mayor, comenzando en a y terminando en b :

$$P = \{x_i\}_{i=0}^n \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

El conjunto de las particiones de $[a, b]$ lo indicamos con $\mathcal{P}([a, b])$. Una partición como la indicada divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, cada uno de longitud $x_i - x_{i-1}$.

Definición 1.2. (Suma inferior y superior) Sea f una función acotada definida en $[a, b]$, y sea $P \in \mathcal{P}([a, b])$, $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Sean, para cada $i = 1, \dots, n$,

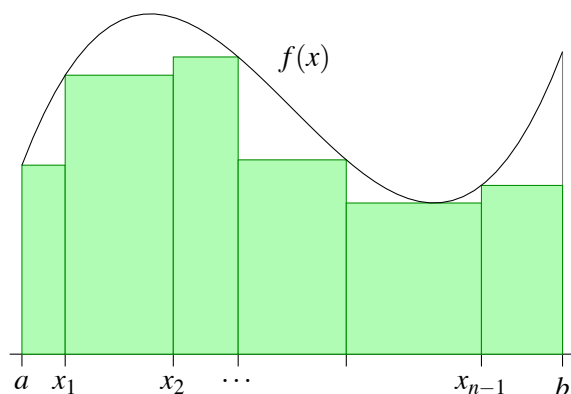
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}; \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

La **suma inferior de f asociada a P** se define como

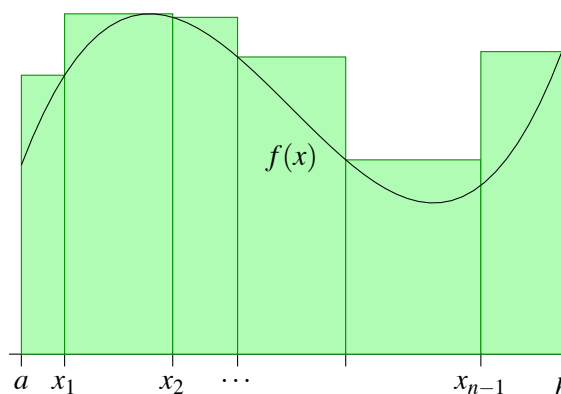
$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

y la **suma superior de f asociada a P** es

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$



Suma inferior asociada a una partición



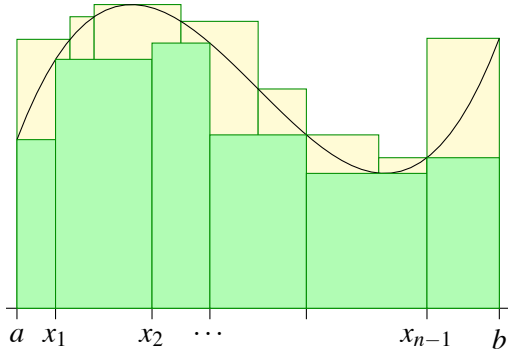
Suma superior asociada a una partición

Proposición (Propiedades de L y U) Sea f una función acotada en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$:

- 1) $L(f, P) \leq U(f, P)$ para cualquier $P \in \mathcal{P}([a, b])$
- 2) Si P y Q son particiones de $[a, b]$ y $P \subseteq Q$ entonces:
 - a) $L(f, P) \leq L(f, Q)$
 - b) $U(f, Q) \leq U(f, P)$

3) Si P y Q son particiones de $[a, b]$ cualesquiera, entonces:

$$L(f, P) \leq U(f, Q)$$



Suma inferior y suma superior para particiones distintas

4) Existen los números

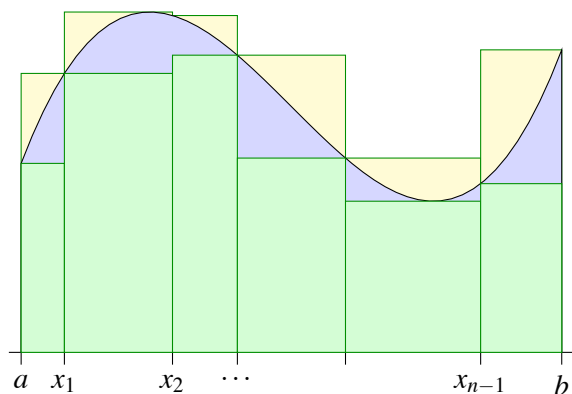
$$\sup\{L(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\},$$

$$\inf\{U(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Nota (relación entre la integral y la medida de áreas). Supongamos que f es una función no negativa y consideremos la región que delimita su gráfica con las rectas $y = 0, x = a$ y $x = b$. Si el área de dicha región es A , entonces

$$L(f, P) \leq A \leq U(f, P)$$

ya que las respectivas sumas son las áreas que obtenemos si cambiamos f en cada $[x_{i-1}, x_i]$ por m_i o M_i , y los hemos definido de forma que $m_i \leq f \leq M_i$ (de hecho hemos tomado los valores más ajustados que cumplen dichas desigualdades).



Suma superior, área y suma inferior

Definición 1.3. Dada f acotada en $[a, b]$, se define su **integral inferior** en $[a, b]$ como

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\},$$

y su **integral superior** en $[a, b]$ como

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{U(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Notemos que, como consecuencia de la proposición previa, la integral inferior y la superior son valores reales perfectamente definidos para cualquier función acotada en un intervalo cerrado y acotado. No es difícil adivinar que la integral inferior es siempre menor o igual que la superior, pero la demostración de este hecho es menos trivial de lo que parece a simple vista.

Teorema Si f es una función acotada en $[a, b]$, entonces su integral inferior es siempre menor o igual que su integral superior:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Definición 1.4. Una función f acotada en $[a, b]$ es **integrable-Riemann** en $[a, b]$ (en el sentido de Darboux), o simplemente **integrable**, si se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

En tal caso, al valor común de dichas integrales se le llama la **integral** (de Riemann) de f en $[a, b]$, y se escribe $\int_a^b f$.

A veces es cómodo escribir la integral como $\int_a^b f(x)dx$, expresando la función mediante su valor $f(x)$ en la variable x . En tal caso, es indiferente la letra empleada: el mismo significado tiene $\int_a^b f(y)dy$, $\int_a^b f(z)dz$, $\int_a^b f(t)dt$, etc.; todos estos símbolos representan la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$.

Teorema (condición de integrabilidad de Riemann). Una función f acotada en $[a, b]$ es integrable en dicho intervalo si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = P_\varepsilon$ de $[a, b]$ tal que

$$L(f, P) - U(f, P) < \varepsilon.$$

Convenio. Si $a > b$ y f es integrable en $[b, a]$, escribimos

$$\int_a^b f = - \int_b^a f.$$

Si $a = b$, escribimos $\int_a^b f = 0$.

Propiedades básicas de la integral de Riemann

Teorema Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$ y sea α un número real. Entonces

a) αf es integrable y $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$.

b) $f + g$ es integrable y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Teorema Sea f una función definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Dado $c \in [a, b]$, son equivalentes:

a) f es integrable en $[a, b]$;

b) f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$.

Además, cuando f es integrable en $[a, b]$ se tiene: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Corolario Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, y sean $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$. Se cumple que f es integrable en $[a, b]$ si y solo si lo es en $[c_{i-1}, c_i]$ para cada $i = 1, \dots, n$, y en tal caso

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

Teorema Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$ tales que

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para cada } x \in [a, b].$$

Entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Teorema Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Teorema Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$. Entonces:

a) f^2 es integrable en $[a, b]$;

b) la función producto fg es integrable en $[a, b]$.

Teorema Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$ entonces:

a) Si f es monótona en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$

b) Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$

c) Si f es continua salvo en un número finito de puntos donde es acotada, entonces f es integrable en $[a, b]$

Teorema (Primer teorema fundamental del cálculo integral (segundo)).

Sea f una función integrable en $[a, b]$. Definamos $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces:

a) F es continua en $[a, b]$;

b) si f es continua en algún $x_0 \in [a, b]$, entonces F es derivable en x_0 y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Regla de Barrow (segundo teorema fundamental del cálculo integral)

Teorema (regla de Barrow). Sea f una función integrable en un intervalo $[a, b]$ y supongamos que existe otra función g continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces,

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

La regla de Barrow nos dice cómo calcular la integral de una función f integrable entre a y b : si g es continua en $[a, b]$ y es una primitiva de f en (a, b) , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a).$$

La diferencia $g(b) - g(a)$ suele escribirse como $g(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$. Es decir:

$$\int_a^b f(x) dx = g(x) \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Ejemplo. La función arc sen es continua, luego integrable, en el intervalo $[0, 1]$. Calculando por partes una primitiva, encontramos la función $x \operatorname{arc sen} x + \sqrt{1-x^2}$, continua en $[0, 1]$ y derivable claramente en el intervalo $[0, 1)$, con derivada arc sen x en ese intervalo; menos claro es lo que sucede en el punto 1, pero según el teorema 6.3.1 no necesitamos saberlo para garantizar que

$$\int_0^1 \operatorname{arc sen} x dx = \left[1 \cdot \operatorname{arc sen} 1 + \sqrt{1-1^2} \right] - \left[0 \cdot \operatorname{arc sen} 0 + \sqrt{1-0^2} \right] = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Si aplicamos la regla de Barrow para calcular una integral, puede ser conveniente utilizar los resultados empleados en el cálculo de primitivas, como el teorema de integración por partes que acabamos de citar o el teorema de cambio de variable. Ambos tienen su versión para integrales. Vemos primero la de integración por partes:

Teorema (cambio de variable). Sea u una función derivable en un intervalo abierto J tal que u' es continua y sea I un intervalo abierto tal que $u(J) \subseteq I$. Si f es continua en I , entonces $f \circ u$ es continua en J y

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$$

para cualesquiera $a, b \in J$.

Ejemplo. Calculemos el valor de $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$.

Ponemos

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1-(x/2)^2} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 4\sqrt{1-(x/2)^2} \frac{1}{2} dx$$

(hacemos el cambio de variable $t = x/2$ según la fórmula (6.3), de izquierda a derecha)

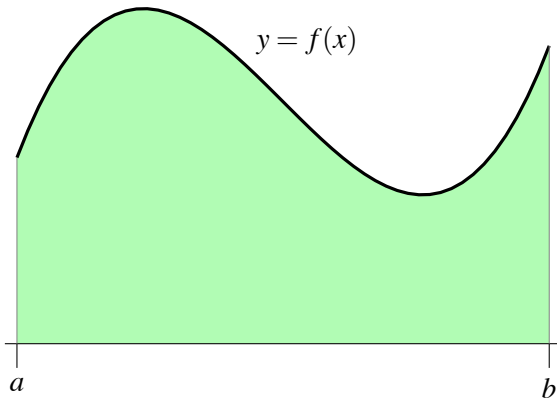
$$= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} 4\sqrt{1-t^2} dt$$

(ahora hacemos el cambio de variable $t = \text{sen } y$ según la fórmula (6.3), de derecha a izquierda)

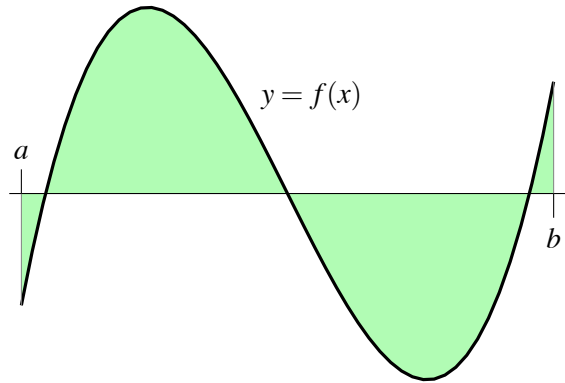
$$\begin{aligned} &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\sqrt{1-\text{sen}^2 y} \cos y dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4|\cos y| \cos y dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\cos^2 y dy \\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2(1 + \cos 2y) dy = (2y + \text{sen } 2y) \Big|_{y=-\pi/3}^{y=\pi/3} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Apéndice: cálculo de áreas, longitudes y volúmenes

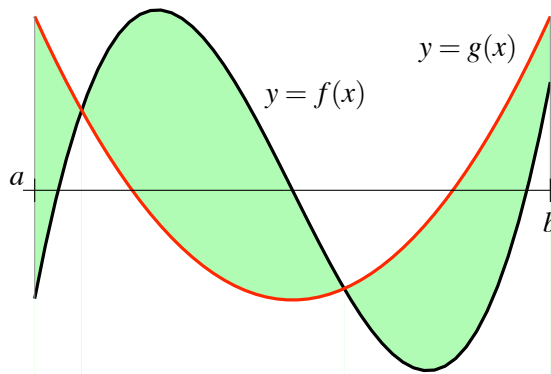
Área de una figura plana



El área de la figura es $\int_a^b f(x) dx$,
si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$

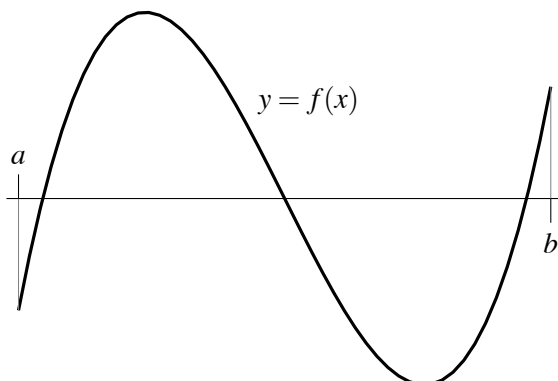


El área de la figura es $\int_a^b |f(x)| dx$



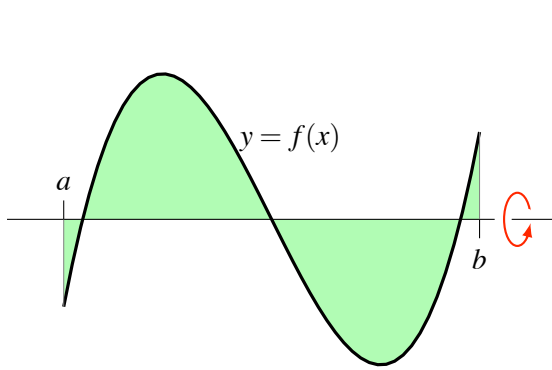
El área de la figura es $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Longitud de una curva plana

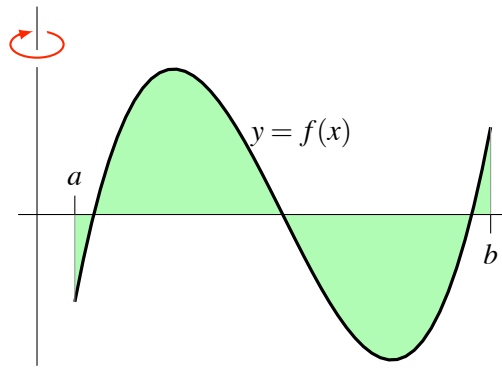


La longitud de la curva es $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

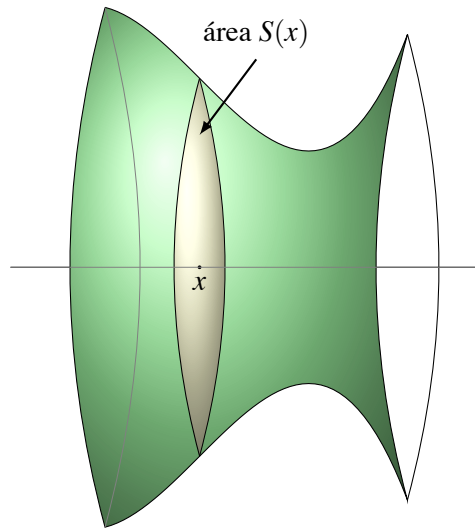
Volumen de un cuerpo de revolución



El volumen del cuerpo generado al girar la figura alrededor del eje x es $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$

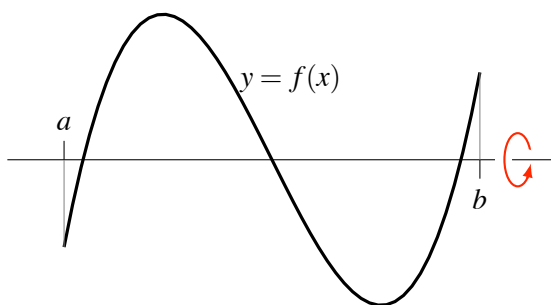


El volumen del cuerpo generado al girar la figura alrededor del eje x es $\int_a^b 2\pi x |f(x)| dx$, si $a, b \geq 0$



El volumen de la figura es $\int_a^b S(x) dx$, donde $S(x)$ es el área de la sección perpendicular al eje en x

Área de una superficie de revolución



El área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje x es $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$