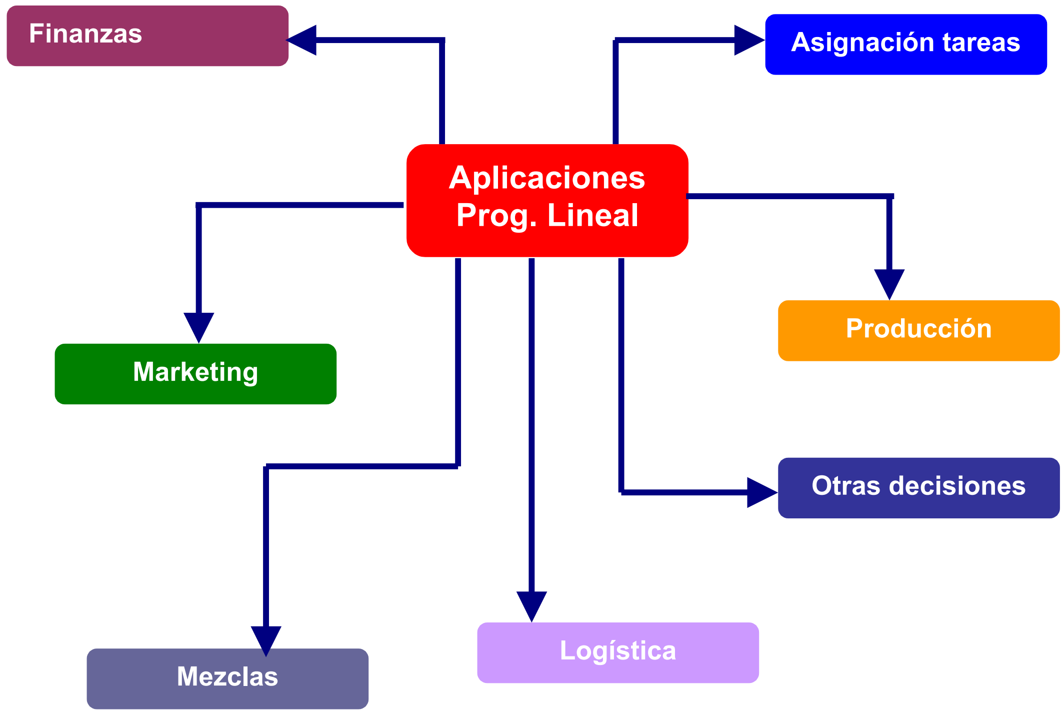
APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Autores: Javier Faulin (ffaulin@uoc.edu), Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Después de estudiar detalladamente los conceptos básicos de Programación Lineal ubicados en un contexto de aplicaciones de la Investigación Operativa en el mundo empresarial e industrial, se hace preciso describir cómo es posible aplicar los conceptos anteriores en diferentes situaciones prácticas. Este desarrollo de situaciones del mundo real constituye el auténtico desarrollo de la programación lineal. No se tratan de meras aplicaciones, sino del campo específico natural de desarrollo de la programación lineal. Sin casos prácticos como los que aquí se van a desarrollar no se hubiera dado el auge real de esta técnica operacional. Por otra parte, el conocimiento de aplicación de los principales conceptos de programación lineal permite plantear la resolución de nuevos casos prácticos que surgen día a día en la Empresa, la Industria y la Ingeniería.
De esta forma, el objetivo de este capítulo es mostrar el vasto número de problemas de la vida real que pueden ser abordados mediante las técnicas de programación lineal. Presentaremos aplicaciones a áreas tan diversas como dirección de la producción, investigación de mercados, marketing, logística, finanzas, etc. En todos esos ámbitos, la programación lineal se revela como herramienta insustituible en la toma de decisiones.

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

OBJETIVOS

- Conocimiento detallado de la Programación Lineal en el mundo real.
- Conocimiento detallado de los principales problemas que resuelve la Programación Lineal.
- Adquisición de habilidades para el planteamiento y resolución de nuevos casos reales.
- Manejo del paquete LINDO en la resolución de casos reales.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Se recomienda haber leído los mathblocks de *Introducción a la Investigación Operativa* y de *Programación Lineal y Programación Lineal Entera con Excel y LINDO*.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Programación lineal y método simplex:

Una vez se tiene un concepto general de lo que es la programación lineal, es importante conocer la forma de actuación particular de los algoritmos que resuelven programas lineales. De entre todos los algoritmos destaca por su importancia histórica y práctica el método simplex. Dicho método fue desarrollado por Dantzig en 1947, alcanzando un éxito inusitado en las décadas posteriores con el desarrollo de los computadores. El conocimiento básico de dicho método ayuda a la comprensión de las diferentes formas de resolución de programas lineales. Dicho método puede ser estudiado en alguno de los manuales que se presentan a continuación: Hillier y Liebermann (2001) (Capítulos 4 y 5) o bien Winston (1994) (Capítulos 3 y 4). Por otra parte, el estudio de aplicaciones de la Programación Lineal es exhaustivo en los textos de Hillier, Hillier y Liebermann (2000); Eppen et al.(1998); o bien de Anderson, Sweeney y Williams (2001).

Clasificación de las aplicaciones de PL:

La Programación Lineal presenta un gran número de aplicaciones en multitud de ámbitos empresariales, industriales, de gestión y en general, de toma de decisiones. En este mathblock tan sólo se hace una exposición sucinta de las aplicaciones más clásicas. Sin embargo, se aconseja al lector la consulta de los documentos de Internet siguientes:

http://www.fred.ifas.ufl.edu/courses/AEB5516/Lectures/blending.doc
http://dsc.gsu.edu/dscthw/Optimize/LP.PDF

En el primero se describen los problemas clásicos de mezclas y de la dieta, mientras en el segundo se desarrolla un elenco de aplicaciones que sirven muy bien para completar los casos aquí descritos. En otro orden de cosas, en el presente mathblock se van a desarrollar campos de aplicación de la programación lineal en los ámbitos siguientes: Marketing, Producción, Asignación de Tareas, Finanzas, Logística y Mezclas. Esta clasificación no es exhaustiva: existen otros muchos campos de aplicación de la Programación Lineal que aquí no aparecen citados, todos ellos relacionados con tomas de decisiones operativas y tácticas en la gestión empresarial. En algún caso, también aparecen aplicaciones en tomas de decisiones estratégicas.

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN MARKETING

SELECCIÓN DE MEDIOS PUBLICITARIOS

La Programación Lineal se utiliza en el campo del marketing y la publicidad como una herramienta que nos permite determinar cuál es la combinación más efectiva de medios para anunciar nuestros productos. En muchas ocasiones partiremos de un presupuesto para publicidad fijo y nuestro objetivo será distribuirlo entre las distintas opciones que se nos ofrecen (televisión, radio, periódicos, revistas, etc.) de forma que nuestros productos tengan la mayor difusión posible. En otros casos, las restricciones no serán presupuestarias sino que vendrán dadas por la disponibilidad de cada medio y por las políticas publicitarias de nuestra propia empresa.

Supongamos, por ejemplo, que trabajamos para una cadena nacional de bingos, el director de la cual nos otorga un presupuesto de 8.000 € por semana para publicidad. Este dinero debe dedicarse a publicar anuncios en cuatro tipos de medios de difusión: TV, periódicos, y dos emisoras de radio. Nuestro objetivo final no será otro que el de conseguir la mayor audiencia posible. En el cuadro que se muestra a continuación se recoge información referente a la audiencia esperada por anuncio, el coste del mismo, y el nº máximo de anuncios que es posible insertar en cada medio por semana:

MEDIO	AUDIENCIA POR ANUNCIO	COSTE POR ANUNCIO (€)	Nº MÁXIMO POR SEMANA
TV	5.000	800	12
Periódico	8.500	925	5
Radio 1	2.400	290	25
Radio 2	2.800	380	20

Además, los acuerdos contractuales de nuestra empresa requieren la contratación al menos 5 anuncios de radio por semana, aunque la dirección insiste en no dedicar a este medio más de 1.800 € por semana. Usaremos LINDO para plantear y resolver este problema:

```
! SELECCIÓN DE MEDIOS

! X1 = "anuncios en TV por semana"
! X2 = "anuncios en periódico por semana"
! X3 = "anuncios en radio 1 por semana"
! X4 = "anuncios en radio 2 por semana"

MAX     5000 X1 + 8500 X2 + 2400 X3 + 2800 X4

ST
 X1 <= 12
 X2 <=  5
 X3 <= 25
 X4 <= 20

 800 X1 + 925 X2 + 290 X3 + 380 X4 <= 8000

     X3 +      X4 >=    5
 290 X3 + 380 X4 <= 1800

END

GIN 4
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       3
 OBJECTIVE VALUE =    67240.3047

 SET       X1 TO <=      2 AT    1, BND=  0.6699E+05 TWIN= 0.6514E+05      27
 SET       X4 TO <=      0 AT    2, BND=  0.6690E+05 TWIN= 0.6690E+05      31

 NEW INTEGER SOLUTION OF     66900.0000     AT BRANCH      2 PIVOT      31
 BOUND ON OPTIMUM:   66900.00
```

```
DELETE        X4 AT LEVEL     2
DELETE        X1 AT LEVEL     1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     2 PIVOTS=      31

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       66900.00

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1          2.000000      -5000.000000
       X2          5.000000      -8500.000000
       X3          6.000000      -2400.000000
       X4          0.000000      -2800.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)        10.000000          0.000000
       3)         0.000000          0.000000
       4)        19.000000          0.000000
       5)        20.000000          0.000000
       6)        35.000000          0.000000
       7)         1.000000          0.000000
       8)        60.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=      31
 BRANCHES=    2 DETERM.=  1.000E    0
```

Por tanto, la forma más efectiva de distribuir nuestro capital en base a las condiciones preestablecidas, será emitiendo dos anuncios semanales en televisión, 5 en el periódico, y 6 en la radio 1. Ello hará que unos 66.900 potenciales compradores conozcan nuestros productos.

ESTUDIOS DE MERCADO

La programación lineal es aplicable también a la investigación de mercados. En el siguiente ejemplo se muestra cómo los estadísticos pueden hacer uso de la Programación Lineal a la hora de diseñar encuestas:

Supongamos que pretendemos realizar una encuesta para determinar la opinión de los españoles acerca del problema de la inmigración. A fin de que la misma sea significativa desde un punto de vista estadístico, exigiremos que ésta deba cumplir los siguientes requisitos:

1. *Entrevistar al menos un total de 2.300 familias españolas.*
2. *De las familias entrevistadas, al menos 1.000 deben cumplir que su cabeza de familia no supere los 30 años de edad.*
3. *Al menos 600 de las familias entrevistadas tendrán un cabeza de familia con edad comprendida entre los 31 y los 50 años.*
4. *El porcentaje de entrevistados que pertenecen a zonas con elevada tasa de inmigración no debe ser inferior a un 15% del total.*
5. *Finalmente, no más de un 20% de los entrevistados mayores de 50 años pertenecerán a zonas con alta tasa de inmigración.*

Además, todas las encuestas deberán realizarse en persona. A continuación indicamos el coste estimado de cada encuesta según la edad del encuestado y si procede o no de una zona con una alta tasa de inmigración:

ZONA	EDAD < 31 AÑOS	EDAD 31-50	EDAD > 50
Tasa de inmig. elevada	7.50 €	6.80 €	5.50 €
Tasa de inmig. baja	6.90 €	7.25 €	6.10 €

Obviamente, nuestro objetivo será cumplir todos los requisitos anteriores minimizando el coste:

```
! ESTUDIO DE MERCADO - ENCUESTA


! I3 = "nº encuestados de edad <= 30 y que viven en zonas de mucha inmigración"
! I4 = "nº encuestados de edad entre 31-50 que viven en zonas de mucha inmigración"
! I5 = "nº encuestados de edad > 50 que viven en zonas de mucha inmigración"

! N3 = "nº encuestados de edad <= 30 y que NO viven en zonas de mucha inmigración"
! N4 = "nº encuestados de edad entre 31-50 que NO viven en zonas de mucha inmigración"
! N5 = "nº encuestados de edad > 50 que NO viven en zonas de mucha inmigración"


MIN      7.50 I3 + 6.80 I4 + 5.50 I5 + 6.90 N3 + 7.25 N4 +6.10 N5


ST
                   I3 + I4 + I5 + N3 + N4 + N5 >= 2300
                   I3 +           N3           >= 1000
                        I4 +           N4      >=  600

  I3 + I4 + I5 - .15 I3 - .15 I4 - .15 I5 - .15 N3 -.15 N4 - .15 N5 >= 0

                         I5 - .2 I5 - .2 N5 <= 0


END

GIN 6
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4
 OBJECTIVE VALUE =   15166.0000

 FIX ALL VARS.(    2)  WITH RC >  0.000000E+00

 NEW INTEGER SOLUTION OF    15166.0000     AT BRANCH      0 PIVOT       4
 BOUND ON OPTIMUM:  15166.00
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=       4

 LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      15166.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        I3         0.000000          7.500000
        I4       600.000000          6.800000
        I5       140.000000          5.500000
        N3      1000.000000          6.900000
        N4         0.000000          7.250000
        N5       560.000000          6.100000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
        3)         0.000000          0.000000
        4)         0.000000          0.000000
        5)       395.000000          0.000000
        6)         0.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       4
 BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

Así pues, deberíamos realizar la encuesta exclusivamente a 600 individuos del tipo I4, a 140 del tipo I5, a 1.000 del tipo N3 y a 560 del tipo N5. Ello supondría unos costes estimados de 15.166 €.

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN PRODUCCIÓN

COMBINACIÓN ÓPTIMA DE BIENES

A menudo las técnicas de PL permiten decidir sobre la cantidad más adecuada que una empresa debe producir de cada uno de sus productos a fin maximizar los beneficios sin dejar de cumplir con unos determinados requisitos (financieros, de demanda, contractuales, de disponibilidad de materias primas, etc.).

Una empresa dedicada a la elaboración y venta de ropa para hombre produce cuatro tipos de corbatas, una de seda, otra de poliester, y dos de poliester/algodón. La tabla siguiente muestra el coste de cada uno de estos materiales y su disponibilidad:

MATERIAL	COSTE POR METRO (€)	METROS DISPONIBLES / MES
Seda	21	800
Poliester	6	3.000
Algodón	9	1.600

La empresa tiene contratos de larga duración para suministrar corbatas a cinco cadenas de tiendas de ropa. En dichos contratos se especifica que la empresa deberá suministrar unas cantidades mínimas mensuales de cada tipo de corbata y, que en caso de recibir una demanda superior al mínimo, será la propia empresa la que decida si puede o no servir la cantidad extra solicitada. A continuación aparecen los datos relevantes:

TIPO DE CORBATA	PRECIO DE VENTA (€)	MÍNIMO A SERVIR	DEMANDA MENSUAL	METROS NECESARIOS	COMPOSICIÓN
Seda	6.70	6.000	7.000	0.125	100% seda
Poliester	3.55	10.000	14.000	0.08	100% poliester
Algodón # 1	4.31	13.000	16.000	0.10	50% poliester 50% algodón
Algodón # 2	4.81	6.000	8.500	0.10	30% poliester 70% algodón

El objetivo de la empresa es elegir el plan de producción que maximice sus beneficios mensuales.

Lo primero en este problema será determinar qué beneficios nos reporta cada una de las corbatas vendidas y fabricadas. Así por ejemplo, cada corbata de seda requiere de 0.125 metros de este material, a un coste de 21 € por metro, lo que nos da un coste por corbata de 2.62 €. Como la vendemos por 6.70 €, el beneficio que obtenemos será de 4.08 € por cada unidad producida y vendida. El mismo razonamiento se aplicará a los restantes tres tipos de corbata, con lo que obtendremos el siguiente planteamiento:

```
! COMBINACIÓN DE BIENES A PRODUCIR

! S = "N° corbatas de seda a producir"
! P = "N° corbatas de poliester a producir"
! A1 = "N° corbatas de algodón #1 a producir"
! A2 = "N° corbatas de algodón #2 a producir"

MAX    4.08 S + 3.07 P + 3.56 A1 + 4.00 A2

ST
            .125 S                           <=  800
                     .08 P + .05 A1 + .03 A2 <= 3000
                             .05 A1 + .07 A2 <= 1600

                                S >=  6000
                                S <=  7000
                                P >= 10000
                                P <= 14000
                               A1 >= 13000
                               A1 <= 16000
```

```
                                    A2 >=  6000
                                    A2 <=  8500

     END

     GIN 4
```

Observar que la solución a nuestro caso será producir cada mes 6.400 corbatas de seda, 14.000 de poliéster, 16.000 de algodón #1, y 8.500 de algodón #2. Ello nos dará unos beneficios de 160.052 € por mes.

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
OBJECTIVE VALUE =   160052.000


NEW INTEGER SOLUTION OF    160052.000     AT BRANCH      0 PIVOT       2
BOUND ON OPTIMUM:  160052.0
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=       2

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       160052.0

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        S       6400.000000         -4.080000
        P      14000.000000         -3.070000
       A1      16000.000000         -3.560000
       A2       8500.000000         -4.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000         0.000000
       3)       825.000000         0.000000
       4)       204.999985         0.000000
       5)       400.000000         0.000000
       6)       600.000000         0.000000
       7)      4000.000000         0.000000
       8)         0.000000         0.000000
       9)      3000.000000         0.000000
      10)         0.000000         0.000000
      11)      2500.000000         0.000000
      12)         0.000000         0.000000

NO. ITERATIONS=       2
BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN

El establecer un plan de producción para un período de semanas o meses resulta ser una tarea difícil e importante en la mayoría de las plantas de producción. El director de operaciones debe considerar muchos factores: mano de obra, costes de inventario y almacenamiento, limitaciones de espacio, demanda, etc. Por lo general la mayoría de las plantas producen más de un bien, con lo que la tarea anterior se complica aún más. Como veremos en el siguiente ejemplo, el problema de la planificación se asemeja bastante al de la combinación óptima de bienes, pudiendo ser el objetivo maximizar beneficios o bien minimizar los costes de producción más almacenamiento.

La empresa Motores de Almazora, S.A. fabrica dos tipos de motores eléctricos los cuales vende a la compañía Electrodomésticos Villareal, S.A. Tres veces al año, el director de compras de esta última empresa envía a la primera un pedido que abarca los siguientes cuatro meses. A *continuación se muestra una tabla con el pedido para el período enero-abril para cada modelo de motor:*

MODELO	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL
ME3A	800	700	1.000	1.100
ME3B	1.000	1.200	1.400	1.400

La planificación de la producción en Motores de Almazora, S.A. debe considerar cuatro factores:

1. *El deseo de producir el mismo nº de motores cada mes. Esto simplificaría la planificación y los horarios de trabajadores y máquinas.*
2. *La necesidad de mantener lo más bajo posible los costes de estucos. Esto sugiere que en cada mes se ha de ajustar la producción a lo estrictamente requerido en el mismo.*
3. *Limitaciones de almacenes, las cuales son de 3.300 unidades máximo de cada tipo.*
4. *La política de no despidos de la compañía, la cual garantiza que un mínimo de la capacidad productiva estará en activo cada mes. Concretamente se asegura un nivel no inferior a las 2.240 horas mensuales de mano de obra, pudiéndose ampliar tal recurso hasta las 2.560 horas mensuales si fuese necesario.*

Deberemos tener en cuenta que los costes de producción son de 10 € por unidad de ME3A y de 6 € por unidad de ME3B, si bien debido a un acuerdo con los sindicatos, éstos costes se incrementarán en un 10% a partir del 1 de marzo. Además, cada motor de tipo ME3A que permanezca en estoc supone un coste de 0.18 € por mes, mientras que almacenar uno de tipo ME3B genera un coste de 0.13 € mensuales.

Por otro lado, se desea tener un inventario de seguridad de 450 ME3A y 300 ME3B a finales de abril. Indicar finalmente que cada ME3A requerirá de 1.3 horas de mano de obra, mientras que cada ME3B necesita de 0.9 horas.

```
TITLE PLAN DE PRODUCCIÓN


! XAi = "nº de ME3A producidos durante el mes i"   i=1,2,3,4
! XBi = "nº de ME3B producidos durante el mes i"


! IAi = "nº de ME3A en inventario al final del mes i"
! IBi = "nº de ME3B en inventario al final del mes i"


MIN  10XA1 + 10XA2 + 11XA3 + 11XA4 + 6XB1 + 6XB2 + 6.6XB3 + 6.6XB4 +

   .18IA1 + .18IA2 + .18IA3 + .18IA4 + .13IB1 + .13IB2 + .13IB3 + .13IB4

               ! costes de producción y costes de inventario


ST
           XA1 - IA1 =  800 ! demanda de enero
           XB1 - IB1 = 1000

           XA2 + IA1 - IA2 =  700! demanda de febrero
           XB2 + IB1 - IB2 = 1200

           XA3 + IA2 - IA3 = 1000! demanda de marzo
           XB3 + IB2 - IB3 = 1400

           XA4 + IA3 - IA4 = 1100! demanda de abril
           XB4 + IB3 - IB4 = 1400

           IA4 = 450
           IB4 = 300

           IA1 + IB1 <= 3300
           IA2 + IB2 <= 3300
           IA3 + IB3 <= 3300
```

```
            IA4 + IB4 <= 3300
            1.3XA1 + .9XB1 >= 2240! mínimo uso de mano de obra en enero
            1.3XA1 + .9XB1 <= 2560

            1.3XA2 + .9XB2 >= 2240! mínimo uso de mano de obra en febrero
            1.3XA2 + .9XB2 <= 2560

            1.3XA3 + .9XB3 >= 2240! mínimo uso de mano de obra en marzo
            1.3XA3 + .9XB3 <= 2560

            1.3XA4 + .9XB4 >= 2240! mínimo uso de mano de obra en abril
            1.3XA4 + .9XB4 <= 2560

END

GIN 16
```

El ejemplo anterior nos muestra la elaboración de un plan de producción relativamente sencillo ya que sólo se consideran dos productos. Sin embargo, el mismo procedimiento usado aquí es aplicable a planes de producción con decenas de productos y centenares de restricciones.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      13
 OBJECTIVE VALUE =    76301.6172

 SET       XA2 TO <=  1138 AT    1, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      48
 SET       IB2 TO <=     0 AT    2, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      51
 SET       IA1 TO <=   476 AT    3, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      55
 SET       IB3 TO >=     2 AT    4, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      58
 SET       IA3 TO >=   757 AT    5, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      65

 NEW INTEGER SOLUTION OF     76302.7188      AT BRANCH       5 PIVOT       65
 BOUND ON OPTIMUM:  76301.62
 FLIP       IA3 TO <=       756 AT     5 WITH BND=    -76302.602
 SET       XA2 TO >=  1138 AT    6, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      65
 SET       IA1 TO >=   476 AT    7, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      65
 SET       IB1 TO <=     0 AT    8, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      65
 SET       IB3 TO >=     3 AT    9, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.1000E+31      66
 SET       IA3 TO >=   756 AT   10, BND= -0.7630E+05 TWIN=-0.7630E+05      68

 ...                  ...                        ...
 ...                         ...                        ...


OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      76301.87

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       XA1      1270.000000         10.000000
       XA2      1144.000000         10.000000
       XA3       843.000000         11.000000
       XA4       793.000000         11.000000
       XB1      1010.000000          6.000000
       XB2      1192.000000          6.000000
       XB3      1399.000000          6.600000
       XB4      1699.000000          6.600000
       IA1       470.000000          0.180000
       IA2       914.000000          0.180000
       IA3       757.000000          0.180000
       IA4       450.000000          0.180000
       IB1        10.000000          0.130000
       IB2         2.000000          0.130000
       IB3         1.000000          0.130000
       IB4       300.000000          0.130000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
        3)         0.000000          0.000000
```

```
          4)          0.000000          0.000000
          5)          0.000000          0.000000
          6)          0.000000          0.000000
          7)          0.000000          0.000000
          8)          0.000000          0.000000
          9)          0.000000          0.000000
         10)          0.000000          0.000000
         11)          0.000000          0.000000
         12)       2820.000000          0.000000
         13)       2384.000000          0.000000
         14)       2542.000000          0.000000
         15)       2550.000000          0.000000
         16)        319.999908          0.000000
         17)          0.000085          0.000000
         18)        319.999908          0.000000
         19)          0.000083          0.000000
         20)        114.999924          0.000000
         21)        205.000076          0.000000
         22)        319.999908          0.000000
         23)          0.000078          0.000000

 NO. ITERATIONS=      245
 BRANCHES=    62 DETERM.=   1.000E    0
```

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A LA DISTRIBUCIÓN DE TAREAS

ASIGNACIÓN DE TRABAJOS

El objetivo aquí será asignar de la forma más eficiente posible un trabajo a cada empleado o máquina. Ejemplos de este tipo de asignación serían la distribución de coches patrulla por las calles de una ciudad o la destino de cada jefe de ventas a una determinada zona geográfica. El objetivo puede ser bien minimizar los tiempos o costes de desplazamiento, o bien maximizar la efectividad de las asignaciones.

Aparte de poder utilizar los algoritmos tradicionales (Simplex y Karmarkar), este tipo de problemas también puede resolverse usando técnicas especialmente diseñadas para sus características como el método húngaro, el cual necesita de menos iteraciones para dar con la solución.

Una propiedad particular de los problemas de asignación es que tanto los coeficientes tecnológicos cómo los términos independientes (*right-hand-side*) siempre toman el valor 1. Además, todas las variables serán binarias, tomando el valor 1 si la asignación propuesta se lleva a cabo y 0 en caso contrario.

Veamos un ejemplo:

Un gabinete de abogados tiene en su nómina cuatro hábiles licenciados en derecho a los cuales quiere utilizar de forma óptima asignando a cada uno el caso que más se ajuste a sus características. El 1 de marzo llegan a la compañía cuatro clientes en busca de asesoramiento, y el director del gabinete decide asignar cada caso a cada uno de sus cuatro empleados según sus especialidades y preferencias.

A continuación se muestra una tabla donde se estima la efectividad (valorada en una escala del 1 al 9) de cada trabajador para cada uno de los casos que presentan los clientes:

ABOGADO	DIVORCIO	FUSIÓN EMPRESAS	ABSORCIÓN EMPRESAS	EXHIBICIONISMO
A1	6	2	8	5

A2	9	3	5	8
A3	4	8	3	4
A4	6	7	6	4

Para resolver esta situación, consideraremos las variables Xij, donde i = 1, 2, 3, 4 según abogado, y j = 1, 2, 3, 4 según caso. Así, la variable Xij tomará el valor 1 si el abogado i es asignado al caso j, y 0 en caso contrario.

```
TITLE    DESPACHO DE ABOGADOS

MAX      6X11 + 2X12 + 8X13 + 5X14 + 9X21 + 3X22 + 5X23 + 8X24 +
         4X31 + 8X32 + 3X33 + 4X34 + 6X41 + 7X42 + 6X43 + 4X44

         ! Maximizamos la efectividad total

ST
                 X11 + X21 + X31 + X41 = 1          ! Caso divorcio
                 X12 + X22 + X32 + X42 = 1          ! Caso fusión
                 X13 + X23 + X33 + X43 = 1          ! Caso absorción
                 X14 + X24 + X34 + X44 = 1          ! Caso exhibicionismo

                 X11 + X12 + X13 + X14 = 1          ! Abogado 1
                 X21 + X22 + X23 + X24 = 1          ! Abogado 2
                 X31 + X32 + X33 + X34 = 1          ! Abogado 3
                 X41 + X42 + X43 + X44 = 1          ! Abogado 4

END

INT 16 ! Todas las variables son binarias
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP     14
 OBJECTIVE VALUE =    30.0000000

 FIX ALL VARS.(     9)  WITH RC >    1.00000

 NEW INTEGER SOLUTION OF     30.0000000     AT BRANCH      0 PIVOT      14
 BOUND ON OPTIMUM:  30.00000
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      14

 LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      30.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X11         0.000000         -6.000000
       X12         0.000000         -2.000000
       X13         1.000000         -8.000000
       X14         0.000000         -5.000000
       X21         0.000000         -9.000000
       X22         0.000000         -3.000000
       X23         0.000000         -5.000000
       X24         1.000000         -8.000000
       X31         0.000000         -4.000000
       X32         1.000000         -8.000000
       X33         0.000000         -3.000000
       X34         0.000000         -4.000000
       X41         1.000000         -6.000000
       X42         0.000000         -7.000000
       X43         0.000000         -6.000000
       X44         0.000000         -4.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         0.000000
```

```
          3)          0.000000          0.000000
          4)          0.000000          0.000000
          5)          0.000000          0.000000
          6)          0.000000          0.000000
          7)          0.000000          0.000000
          8)          0.000000          0.000000
          9)          0.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=      14
 BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

Queda claro pues que el abogado 1 se ocupará del caso de absorción empresarial, el abogado 2 del caso de exhibicionismo, el abogado 3 del caso de la fusión, y el abogado 4 del divorcio.

PLANIFICACIÓN DE HORARIOS

La planificación de horarios intenta dar una respuesta efectiva a las necesidades de personal durante un período concreto de tiempo. La aplicación de la PL a este tipo de problemas resulta especialmente útil cuando los directivos disponen de cierta flexibilidad a la hora de asignar tareas a empleados polifuncionales. Un sector típico donde se hace uso de la PL para tomar decisiones sobre planificación de horarios son las entidades bancarias.

Supongamos que una oficina bancaria necesita diariamente entre 10 y 18 cajeros en función de la hora según se especifica en la tabla siguiente:

FRANJA HORARIA	Nº DE CAJEROS NECESARIOS
9 a.m. – 10 a.m.	10
10 a.m. – 11 a.m.	12
11 a.m. – 12 a.m.	14
12 a.m. – 1 p.m.	16
1 p.m. – 2 p.m.	18
2 p.m. – 3 p.m.	17
3 p.m. – 4 p.m.	15
4 p.m. – 5 p.m.	10

En la actualidad la oficina tiene 12 trabajadores a jornada completa ("full-time"), y dispone de una larga lista de gente dispuesta a trabajar a media jornada ("part-time"). Un cajero que trabaje a media jornada ha de estar operativo 4 horas al día, y estar disponible para comenzar su trabajo a cualquier hora entre las 9 a.m. y la 1 p.m. Por su parte, los trabajadores a jornada completa están operativos de 9 a.m. a 5 p.m., teniendo libre una hora para comer (la mitad de ellos lo harán de 11 a.m. a 12 a.m. y la otra mitad de 12 a.m. a 1 p.m.). Observar que cada uno de estos cajeros tiene una jornada semanal de 35 horas.

Las normas de la entidad limitan el número de horas realizadas por los "part-time" a, como máximo, el 50% de las horas diarias requeridas. Los "part-time" ganan una media de 4 € la hora (es decir, 16 € al día), por 50 € diarios que ganan los "full-time". El banco pretende establecer un horario que minimice sus costes salariales, estando dispuesto a desprenderse de algún trabajador "full-time" si ello resulta conveniente.

```
 TITLE  HORARIOS BANCO

 !  F = "nº trabajadores full-time"
 !  P1 = "nº trabajadores part-time operativos de  9 a.m. a 1 p.m."
 !  P2 = "nº trabajadores part-time operativos de 10 a.m. a 2 p.m."
 !  P3 = "nº trabajadores part-time operativos de 11 a.m. a 3 p.m."
```

```
!  P4 = "nº trabajadores part-time operativos de 12 a.m. a 4 p.m."
!  P5 = "nº trabajadores part-time operativos de  1 p.m. a 5 p.m."

MIN  50 F + 16 P1 + 16 P2 + 16 P3 + 16 P4 + 16 P5

     ! Queremos minimizar los costes salariales

ST
       F + P1                     >= 10     ! Necesidades de 9 a.m. a 10 a.m.
       F + P1 + P2                >= 12
     .5F + P1 + P2 + P3           >= 14
     .5F + P1 + P2 + P3 + P4      >= 16
       F      + P2 + P3 + P4 + P5 >= 18
       F           + P3 + P4 + P5 >= 17
       F                + P4 + P5 >= 15
       F                     + P5 >= 10

       F <= 12

       4P1 + 4P2 + 4P3 + 4P4 + 4P5 <= 56

       ! Los part-time harán a lo sumo el 50% de las horas

END

GIN 6
```

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      8
  OBJECTIVE VALUE =    724.000000

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE
         1)      724.0000

   VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
          F        10.000000         50.000000
         P1         0.000000         16.000000
         P2         2.000000         16.000000
         P3         7.000000         16.000000
         P4         5.000000         16.000000
         P5         0.000000         16.000000

        ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
         2)         0.000000          0.000000
         3)         0.000000          0.000000
         4)         0.000000          0.000000
         5)         3.000000          0.000000
         6)         6.000000          0.000000
         7)         5.000000          0.000000
         8)         0.000000          0.000000
         9)         0.000000          0.000000
        10)         2.000000          0.000000
        11)         0.000000          0.000000

  NO. ITERATIONS=       8
  BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A LAS FINANZAS

SELECCIÓN DE UNA CARTERA DE VALORES

Un problema al que se tienen que enfrentar de forma habitual los directivos de bancos, fondos de inversión, y compañías de seguros es la selección de una serie de inversiones concretas de entre la gran variedad de alternativas existentes en el mercado. Por norma general, el objetivo de estos directivos es maximizar los beneficios esperados de estas inversiones, las cuales se ven sometidas a un conjunto de restricciones, algunas legales y otras provenientes de la propia empresa (como puede ser el nivel de riesgo que se desea asumir o la cantidad máxima que se permite invertir).

Supongamos que nuestro banco se dedica a invertir en créditos al consumo, bonos corporativos, depósitos de oro, y préstamos a la construcción. Con el fin de diversificar la cartera de valores, la Junta Directiva del banco ha puesto límite a las cantidades que se permiten invertir en cada una de las opciones anteriores. En la actualidad disponemos de 5 millones de € para invertir, y pretendemos: (1) Maximizar el interés esperado para los próximos seis meses, y (2) cumplir con la diversificación propugnada por la Junta Directiva según se especifica en la tabla siguiente:

TIPO DE INVERSIÓN	INTERÉS ESPERADO	LÍMITE DE INVERSIÓN (MILLONES DE €)
Crédito al consumo	7%	1.0
Bonos corporativos	11%	2.5
Depósitos de oro	19%	1.5
Préstamos a la construcción	15%	1.8

Además, la Directiva requiere que al menos un 5% de los fondos se dediquen a depósitos de oro y préstamos a la construcción, mientras que el porcentaje dedicado a créditos al consumo no debe superar el 15%.

```
TITLE  SELECCIÓN DE UNA CARTERA

! X1 = "Cantidad invertida en créditos al consumo"
! X2 = "Cantidad invertida en bonos corporativos"
! X3 = "Cantidad invertida en depósitos de oro"
! X4 = "Cantidad invertida en préstamos a la construcción"

MAX   .07 X1 + .11 X2 + .19 X3 + .15 X4
ST
      X1 <= 1000000
      X2 <= 2500000
      X3 <= 1500000
      X4 <= 1800000
      X3 + X4 - .55X1 - .55X2 - .55X3 - .55X4 >= 0
      X1 - .15X1 - .15X2 - .15X3 - .15X4 >= 0
      X1 + X2 + X3 + X4 <= 5000000

END
```

```
        LP OPTIMUM FOUND AT STEP       4

                OBJECTIVE FUNCTION VALUE
                1)       712000.0

          VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
                X1     750000.000000          0.000000
                X2     950000.000000          0.000000
                X3    1500000.000000          0.000000
                X4    1800000.000000          0.000000

               ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
                2)     250000.000000          0.000000
                3)    1550000.000000          0.000000
                4)          0.000000          0.080000
                5)          0.000000          0.040000
                6)     550000.000000          0.000000
                7)          0.000000         -0.040000
                8)          0.000000          0.104000

         NO. ITERATIONS=        4
```

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A LA LOGÍSTICA

El PROBLEMA DEL TRANSPORTE

El llamado problema del transporte se refiere al proceso de determinar el número de bienes o mercancías que se han de transportar desde cada uno de los orígenes a cada uno de los destinos posibles. El objetivo suele ser minimizar costes de transporte, y las restricciones vienen dadas por las capacidades productivas de cada origen y las necesidades de cada destino. Este tipo de problema es un caso específico de PL, por lo que existen métodos y algoritmos especiales que facilitan su resolución (Regla de la Esquina NorOeste, Método de Vogel, Método de Paso Secuencial, y Método de distribución modificada o MODI).

Una compañía de ámbito nacional produce y distribuye una línea de bicicletas de alta competición. La empresa tiene líneas de montaje en dos ciudades, Castellón y Sabadell, mientras que sus tres principales cadenas de distribución están localizadas en Madrid, Barcelona, y Vitoria.

La oficina de Madrid presenta una demanda anual de 10.000 bicicletas, mientras que la de Barcelona solicita 8.000 y la de Vitoria 15.000. La planta de Castellón puede producir hasta 20.000 bicicletas anuales, por 15.000 la de Sabadell. Los costes de transporte por unidad son los siguientes:

	DESTINO		
ORIGEN	Madrid	Barcelona	Vitoria
Castellón	2 €	3 €	5 €
Sabadell	3 €	1 €	4 €

La compañía pretende establecer un plan de distribución que minimice sus costes anuales de transporte.

```
        TITLE   EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

        ! CM = "nº bicicletas a transportar desde Castellón hasta Madrid"
        ! CB = "nº     "             "          "      "        "   Barcelona"
        ! CV = "nº     "             "          "      "        "   Vitoria"
        ! SM = "nº     "             "          "   Sabadell    "   Madrid"
        ! SB = "nº     "             "          "      "        "   Barcelona"
        ! SV = "nº     "             "          "      "        "   Vitoria"
```

```
MIN  2 CM + 3 CB + 5 CV + 3 SM + 1 SB + 4 SV
ST
     CM + SM = 10000
     CB + SB =  8000
     CV + SV = 15000

     CM + CB + CV <= 20000
     SM + SB + SV <= 15000
END
GIN 6
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
 OBJECTIVE VALUE =    96000.0000

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      96000.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        CM      10000.000000          2.000000
        CB          0.000000          3.000000
        CV       8000.000000          5.000000
        SM          0.000000          3.000000
        SB       8000.000000          1.000000
        SV       7000.000000          4.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)          0.000000          0.000000
        3)          0.000000          0.000000
        4)          0.000000          0.000000
        5)       2000.000000          0.000000
        6)          0.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       2
 BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL A MEZCLAS

El PROBLEMA DE LA DIETA

Este problema representa una de las primeras aplicaciones de la PL, y comenzó a utilizarse en los hospitales para determinar la dieta más económica con la que alimentar a los pacientes a partir de unas especificaciones nutritivas mínimas. En la actualidad también se aplica con éxito en el ámbito agrícola con la misma idea de encontrar la combinación óptima de alimentos que, logrando un aporte nutritivo mínimo, suponga el menor coste posible.

Un centro de nutrición utiliza tres tipos de granos para elaborar un cereal natural que vende por kilos. El eslogan del centro es que cada 125 gramos de su cereal, tomados con medio vaso de leche entera, cubre las necesidades alimenticias de un adulto en cuanto a proteínas, hidratos de carbono, fósforo y magnesio. El coste de cada tipo de grano y sus contenidos por kg. se reflejan en la siguiente tabla:

GRANO	COSTE POR KG.	PROTEINAS (unidades/kg)	HIDRATOS C (unidades/kg.)	FÓSFORO (unidades/kg)	MAGNESIO (unidades/kg)
A	0.33 €	22	16	8	5
B	0.47 €	28	14	7	0
C	0.38 €	21	25	9	6

Los requisitos nutricionales mínimos por día para un adulto son 3 unidades de proteínas, 2 de hidratos de carbono, 1 de fósforo, y 0.425 de magnesio. Se tratará pues de establecer la mezcla adecuada de granos que logra cubrir estas necesidades con el mínimo coste para el centro.

```
TITLE PROBLEMA DE LA DIETA

!  XA = "kgs. grano tipo A que usaremos en 125 gramos de cereal"
!  XB = "kgs.   "     "  B         "          "     "      cereal"
!  XC = "kgs.   "     "  C         "          "     "      cereal"

MIN  .33 XA + .47 XB + .38 XC

ST
     22 XA + 28 XB + 21 XC >= 3
     16 XA + 14 XB + 25 XC >= 2
      8 XA +  7 XB +  9 XC >= 1
      5 XA         +  6 XC >=  .425

        XA +    XB +    XC =   .125

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      0.5075001E-01

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        XA         0.025000          0.000000
        XB         0.050000          0.000000
        XC         0.050000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         -0.390000
        3)         0.350001          0.000000
        4)         0.000000          0.000000
        5)         0.000000         -0.440000
        6)         0.000000         10.450000

 NO. ITERATIONS=       3
```

Queda claro pues que la solución ideal será usar 25 gramos de grano tipo A, 50 de grano tipo B y otros 50 de grano tipo C. Con ello logramos cumplir con nuestro eslogan al menor coste posible.

BIBLIOGRAFÍA

1) Anderson, D.R., Sweeney, D. J. y Williams, T.A. (2001): *Quantitative Methods for Business.* West Publishing Company. (Existe versión en español).
2) Anderson, D.R., Sweeney, D. J. y Williams, T.A. (2000): *An Introduction to Management Science. Quantitative Approach to Decision Making.* West Publishing Company. (Existe versión en español)
3) Anderson, D.R., Sweeney, D. J. y Williams, T.A. (1999): *Contemporary Management Science with Spreadsheets.* International Thomson Publishing Company.
4) Camm, J. y Evans, J.R. (2000): *Management Science and Decision Technology*. South Western College Publishing.

5) Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt, C.P., Moore, J.H., Weatherford, L.R. (1998): *Introductory Management Science*. *Decision Modeling with Spreadsheets*. Upper Saddle River. (Existe versión en español)
6) Hillier, F.S. y Liebermann, G.J. (2001): *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Ed. McGraw-Hill.
7) Hillier, F.S., Hillier, M.S. y Liebermann, G.J. (2000): *Introduction to Management Science. A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*. Irwin-McGraw-Hill.
8) Lawrence, A.L. y Pasternack, B.A. (1998): *Applied Management Science. A Computer Integrated Approach for Decision Making*. Ed. Wiley.
9) Moore, L.J., Lee, S.M. y Taylor, B.W. (1993): *Management Science*. Allyn and Bacon.
10) Taha, H.A. (1997): *Operations Research. An Introduction*. McMillan Publishing Company. (Existe versión en español)
11) Winston, W. (1994): *Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos*. Grupo Editorial Iberoamericano.
12) Winston, W. y Albright, S. C. (1997): *Practical Management Science. Spreadsheet Modeling and Applications*. Duxbury Press.

ENLACES

- http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/
  Página web de ejemplos de aplicación de programación matemática.
- http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/opt/diet_history.html
  Historia del problema de la dieta.
- http://www.e-optimization.com/directory/trailblazers/dantzig/interview_dietg.cfm
  Cómo George Dantzig resolvió el problema de la dieta.
- http://www.maths.abdn.ac.uk/~igc/tch/index/mx3503/notes/node14.html
  Curso básico de Programación Lineal y temas afines de la Universidad de Aberdeen.
- http://www.fred.ifas.ufl.edu/courses/AEB5516/Lectures/blending.doc
  Ejemplos de mezclas y de dietas resueltos con Programación Lineal.
- http://dsc.gsu.edu/dscthw/Optimize/LP.PDF
  Artículo de 65 páginas con ejemplos clásicos de aplicación de la Programación Lineal.
- http://www.pitt.edu/~jrclass/or/or-intro.doc
  Artículo introductorio a la Investigación Operativa y sus aplicaciones.
- http://www.kem.ae.poznan.pl/Books/Excel-Solver/T1/T1.htm
  Tutorial sobre optimización con Excel-Solver.
- http://www.faqs.org/faqs/linear-programming-faq/
  Web dedicada a preguntas más comunes acerca de Programación Lineal.
- http://carbon.cudenver.edu/~hgreenbe/courseware/LPshort/intro.html
  Se trata de un curso breve de Programación Lineal.